بسم الله الرحمن الرحیم

کاربرد احتمال در قابلیت اعتماد

مولف :

محمد جریره

انتشارات ارسطو
(چاپ و نشر ایران)
۱۳۹۹

سرشناسه : جریره، محمد، ۱۳۶۶-
عنوان و نام پدیدآور : کاربرد احتمال در قابلیت اعتماد/ مولف محمد جریره.
مشخصات نشر : ارسطو: سامانه اطلاع رسانی چاپ و نشر ایران، ۱۳۹۹.
مشخصات ظاهری : ۲۰۰ ص.: مصور (رنگی)؛ ۱۷/۵×۲۴/۵ س‌م.
شابک :۴۵۰۰۰۰ ریال ۱-۴۶۰-۴۳۲-۶۰۰-۹۷۸ :
وضعیت فهرست نویسی : فیپا
موضوع : احتمال
موضوع : قابلیت اعتماد
رده بندی کنگره : DSR۲۱۹۲
رده بندی دیویی : ۹۵۵/۶۲۲
شماره کتابشناسی ملی : ۶۱۲۷۹۵۱

نام کتاب : کاربرد احتمال در قابلیت اعتماد
مولف : محمد جریره
ناشر : ارسطو (با همکاری سامانه اطلاع رسانی چاپ و نشر ایران)
صفحه آرایی، تنظیم و طرح جلد: پروانه مهاجر
تیراژ : ۱۰۰۰ جلد
نوبت چاپ : اول - ۱۳۹۹
چاپ : مدیران
قیمت : ۴۵۰۰۰ تومان
فروش نسخه الکترونیکی - کتاب‌رسان :
https://chaponashr.ir/ketabresan
شابک : ۱-۴۶۰-۴۳۲-۶۰۰-۹۷۸
تلفن مرکز پخش : ۰۹۱۲۰۲۳۹۲۵۵
www. chaponashr. ir

انتشارات ارسطو
چاپ و نشر ایران
Chaponashr.ir

پیشگفتار

این کتاب برای آشنایی دانشجویان رشته آمار بویژه آن دسته دانشجویانی که در حوزه قابلیت اعتماد سیستم ها و کاربرد آن ها فعالیت علمی دارند؛ و سایر دانشجویان علاقه مند به کاربرد مبانی احتمال در قابلیت اعتماد تدوین شده است. در حوزه قابلیت اعتماد، علیرغم اینکه مقالات فارسی متعددی نگاشته است اما پژوهشگران فعال در این حوزه، اکثر آثار خود در مجلات لاتین به چاپ رسانده اند به گونه ای که اکثر منابع مرتبط در این حوزه لاتین هستند و کتاب های فارسی معدودی نوشته شده است. لذا این کتاب می تواند برای آن دسته از دانشجویانی که در این حوزه فعالیت پژوهشی و علمی دارند، به عنوان یک منبع فارسی مفید استفاده گردد.

نگارش این کتاب از سال ها دور مدنظر مولف بود، اما در هر مقطعی به دلایلی کار تالیف به تعویق می افتاد. برخی از بخش های مهم این کتاب قبلاً در مقالات مجله ندا آماری سال۱۳۹۲ و پایان نامه «مولف» در مقطع کارشناسی ارشد به چاپ رسیده است.

کتاب حاضر خالی از ایراد و اشکال نیست، لذا مولف کتاب هر نوع تذکر، یادآوری، راهنمایی و ارسال مسائل متنوع دیگر برای بهتر شدن این کتاب را با استقبال و تشکر فراوان می پذیرد.

یکی از کاربردهای اصلی آمار به منظور نمایش رفتار پدیده‌های تصادفی، در «نظریه قابلیت اعتماد» [1] نهفته است. از آنجایی که این نظریه بیشتر در مواردی مانند مهندسی و تعیین طول عمر دستگاه‌ها به کار گرفته می‌شود گاهی به آن «مهندسی قابلیت اعتماد»

[1] Reliability Theory

[2] نیز می‌گویند. از این دیدگاه می‌توان قابلیت اعتماد را شاخه‌ای از مهندسی سیستم‌ها [3] دانست. با توجه به دیدگاه مهندسی می‌توان قابلیت اعتماد را توانایی در تعیین طول عمر یک سیستم براساس اجزای آن دانست. از این جهت می‌توان براساس تئوری احتمالات، میزان قابلیت اعتماد را احتمال عدم شکست (احتمال طول عمر) دانست.

در سال های اخیر، محققان زیادی، روشهایی برای توزیع های چندگانه، بطور خاص برای داده های مربوط به طول عمر، ارائه دادند به سبب این، مدل های مفیدی در قابلیت اعتماد و آنالیز بقاء، ارائه شد. مطالعه‌ی دانشمندان آماری در حوزه ی قابلیت اعتماد و آنالیز بقاء موجب شد ویژگی های قابلیت اعتماد سیستم های منسجم از قبیل : طول عمر سیستم، تابع توزیع(بقاء) طول عمر، طول عمر باقیمانده سیستم و مدت زمان سپری شده از خرابی آن در زمان نظارت، تعریف و درباره آنها به مطالعه پرداخته شود. پروشان و بارلو از اولین کسانی بودند که در زمینه علم قابلیت اعتماد سیستم منسجم و ویژگی های آن، کتاب نوشتند. محققان زیادی، عمر باقیمانده سیستم ، مدت زمان سپری شده از خرابی آن و برخی از ویژگی های آنها را مورد مطالعه قرار دادند: اسدی و بایرامف [4] ، (۲۰۰۵) تابع میانگین عمر باقیمانده را برای یک سیستم موازی بررسی کردند و سپس اسدی (۲۰۰۶) این مفهوم را به سیستم های $k-out-of-n$ ، تحت شرط اینکه همه مولفه های سیستم در زمان نظارت t ، سالم باشند، تعمیم داد و برخی از ویژگی آن را بررسی کرد. هم چنین بایرامف و اسدی (۲۰۰۶) تابع میانگین عمر باقیمانده را برای سیستم های $k-out-of-n$ ، تحت شرط اینکه $X_{r:n} \leq t$ ، بدست آوردند. ناورارو و همکارانش (۲۰۰۸) نمایش ترکیبی از طول عمر باقیمانده سیستم را برحسب طول های عمر باقیمانده ی آماره های مرتب طول های عمر مولفه ها، بدست آوردند و همچنین با استفاده از مفهوم بردار علامت، مقایسه های تصادفی بین طول های عمر باقیمانده ی دو سیستم منسجم، انجام دادند. اسدی (۲۰۰۶) میانگین مدت زمان سپری شده از خرابی مولفه های یک سیستم در سطح سیستم و برخی از ویژگی های آن را ، بررسی کرده است و سپس اسدی و توانگر (۲۰۰۹) نتایج را به سیستم های $n-k+1-out-of-n$ تعمیم دادند.

در این کتاب، ویژگی های قابلیت اعتماد سیستم های منسجم مورد بررسی قرار گرفته

---

[2] Reliability Engineering

[3] System Engineering

[4] Asadi and bairamov

است. در فصل اول، تعاریف و مفاهیم مورد نیاز به همراه لم ها و قضایای مورد استفاده، آورده شده است. در فصل دوم، برخی از توابع ساختار منسجم و قابلیت اعتماد آنها و برخی از ویژگی های آن از قبیل تابع طول عمر، بردار علامت بیان شده و در فصل سوم برخی از ویژگی های قابلیت اعتماد از قبیل: باقیمانده عمر سیستم و ویژگی های آن و بردار علامت سیستم بررسی شده است.در فصل چهارم به بررسی مدت زمان سپری شده از خرابی سیستم و مولفه های آن در سطح سیستم پرداخته شده است و با استفاده از بردار علامت سیستم، مفهوم جدیدی از مدت زمان سپری شده از خرابی سیستم و مولفه های آن بیان شده و در نهایت به بررسی برخی از وِیژگی های آن پرداخته شده است. فصل پنجم، توزیع و امید ریاضی تعداد خرابی های سیستم، تحت شرط اینکه سیستم در زمان نظارت، سالم (خراب)باشد، بررسی شده و برخی از ویژگی های این دو مورد مطالعه قرار گرفته است. در فصل ششم، تابع توزیع و متوسط تعداد مولفه های سالم چند ساختار منسجم(سیستم منسجم)، تحت شرط اینکه سیستم در زمان نظارت، سالم(خراب) باشد، بررسی و برخی از ویژگی آنها مورد بحث قرار گرفته است.

سپاسگزاری

بی شک زندگی انسانها سرشار از نکته ها و تجربه ها است که در گذر عمر به سبب آنها زندگی اجتماعی شان شکل و محتوا می یابد. در مسیر زندگی (بویژه بخش علمی آن) افراد زیادی بستر تجارب و پیشرفت های متعدد را برای این حقیر فراهم کردند که بر خود لازم میدانم که برای پاسداشت ارزشهای انسانی و اجتماعی ، قلم را به همراهی خود بخوانم و یکی از پر رنگ ترین این ارزشها را که همانا قدر شناسی و سپاس گزاری است، به خود یادآوری کنم. از آنهایی که بطور مستقیم در محضرشان شاگردی کردم و آنهایی که بطور غیر مستقیم علم و دانش خود را در اختیار بنده قرار دادند؛ سپاس گزارم. اگر بخواهم نام تک تک آنها را ببرم بی تردید جا و فرصت دیگری می طلبد، چه بسا به دلیل عدم حضور ذهن، برخی از بزرگان از قلم بمانند و جا ماندن نامشان شیوه نامهری و ناسپاسی را به ذهن سرایت می دهد که چنین نیست؛ و در آخر خواهم گفت: «سعی کن در هر کاری اولین باشی؛ و هرگز مسیر دیگران را تقلید نکن؛ و خود یابنده مسیر باش؛ ولو آن مسیر در آسمان ها باشد.»

فهرست مطالب

۱ مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه ۱

۲.۱ مفاهیم احتمال ۱

۱.۲.۱ متغیر های تصادفی و آماره های ترتیبی ۴

۲.۲.۱ تابع لگاریتمی- مقعر ۹

۳.۱ مفاهیم مقدماتی در قابلیت اعتماد ۹

۴.۱ ترتیب های تصادفی ۱۳

۲ سیستم های منسجم و ویژگی ها قابلیت اعتماد آنها ۱۹

۱.۲ مقدمه ۲۰

۲.۲ توابع ساختار ۲۱

۱.۲.۲ ساختار منسجم ۲۵

۲.۲.۲ نمایش سیستم های منسجم بر اساس مجموعه های مسیروقطع کننده ۲۶

۳.۲ قابلیت اعتمادسیستم های منسجم ۲۸

۱.۳.۲ قابلیت اعتماد سیستم های متوالی خطیk-out-of-n . . ۳۰

۴.۲ تابع توزیع و بقاء طول عمر سیستم منسجم ۳۷

۱.۴.۲ بردار علامت سیستم منسجم ۳۹

۲.۴.۲ محاسبه بردار علامت برای سیستم هایی با مولفه هایی دارای طولهای عمر وابسته ۴۳
۳.۴.۲ کاربرد بردار علامت در مقایسه سیستم های منسجم . . . ۴۶
۴.۴.۲ تابع توزیع و بقاء سیستم متوالیk-out-of-n ۴۷
۵.۴.۲ میانگین زمان خرابیMTBF ۵۰

۳ میانگین طول عمرباقیمانده سیستم(MRL) ۵۷
۱.۳ مقدمه ۵۸
۲.۳ تابع میانگین طول عمر باقیمانده سیستم با مولفه های مستقل و هم توزیع ۵۸
۱.۲.۳ تابع طول عمر باقیمانده سیستم $n-k+۱-out-of-n$ ۶۰
۲.۲.۳ تابع میانگین طول عمر باقیمانده سیستم موازی ۶۶
۳.۳ تابع طول عمر باقیمانده سیستم تحت تعویض پذیری مولفه ها . . ۷۰
۱.۳.۳ میانگین طول عمر باقیمانده سیستم متوالی k-out-of-n . ۷۲
۴.۳ تابع میانگین طول عمر باقیمانده سیستم تحت نظارت دوگانه . . . ۷۶
۱.۴.۳ طول عمر باقیمانده یک سیستم متوالی k از n تحت نظارت دوگانه ۷۹

۴ مدت زمان سپری شده از خرابی(MPL) سیستم منسجم و مولفه های آن ۸۷
۱.۴ مقدمه ۸۸
۲.۴ PLسیستم و ترتیب های تصادفی بین آنها ۹۰
۳.۴ میانگین زمان خرابی سیستم ۹۹
۴.۴ میانگین زمان خرابی مولفه های سیستم ۱۰۶
۵.۴ تابع میانگین مدت زمان سپری شده از خرابی سیستم تحت نظارت دوگانه ۱۱۸
۶.۴ میانگین مدت زمان سپری شده از خرابی مولفه های یک سیستم موازی تحت نظارت دوگانه ۱۲۰
۱.۶.۴ برخی از ویژگی های $M_n^{r.m}(t_۱,t_۲)$ ۱۲۴

۵ تعداد خرابی های یک سیستم منسجم ۱۳۱
۱.۵ مقدمه ۱۳۲
۲.۵ تعداد مولفه های خراب در یک سیستم $k-n+1$ از n ۱۳۲
۱.۲.۵ نتایج بر روی سیستم منسجم ۱۴۰
۳.۵ تعداد خرابیهای یک سیستم با مولفه هایی با طول های تعویض پذیر ۱۴۳
۱.۳.۵ توزیع تعداد خرابی ها در زمان خرابی سیستم(توزیعX) . ۱۴۴
۲.۳.۵ توزیع خرابی ها تحت نظارت ۱۴۵
۴.۵ تعدادمولفه های خراب در سیستم متوالی k-out-of-n:F ۱۴۸

۶ تعداد مولفه های سالم در یک سیستم منسجم ۱۵۳
۱.۶ مقدمه ۱۵۴
۲.۶ تعداد مولفه های سالم در یک سیستمk-out-of-n:G ۱۵۵
۳.۶ تعداد مولفه های سالم در یک سیستم k از $n:G$ وزن دار ۱۶۱
۴.۶ توزیع شرطی در سیستم های متوالی k-out-of-n ۱۶۴
۵.۶ نتایج بر روی سیستم منسجم با بردار علامت دلخواه ۱۶۸

۷ پیوست ۱۷۱
۱.۷ اثبات قضایای و معادلات فصل اول ۱۷۲
۲.۷ اثبات قضایای فصل دوم ۱۷۳
۳.۷ اثبات قضایای و معادلات فصل پنجم ۱۷۶
۴.۷ نمادگذاری ۱۸۰

واژه نامه انگلیسی به فارسی ۱۸۰

۸ واژه نامه انگلیسی به فارسی ۱۸۱
مراجع ۱۸۷

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

بی شک، حوزه قابلیت اعتماد با کاربری قوانین احتمالات در مورد قطعه ها یا دستگاههای سخت افزاری سروکار دارد. در بحثِ شاخص های تجربی قابلیت اعتماد، داده های مرتبط به عملکرد جمع آوری و سپس به صورت نمودار خلاصه می شود. اما می توان بوسیله توزیع های احتمال، قالب صورت بندی های نظری تر بسط داده شود.

بسیاری از مطالب این فصل اختصاص به دانش ما در دروس پایه آمار(دروس مقطع کارشناسی) دارد که اغلب با آنها آشنایید و به منظور یادآوری، آمادگی، حضور ذهن و امکان دور از دسترس بودن منابع آنها تنظیم شده است. بخش اول به یادآوری آنچه که در احتمال خوانده اید، اختصاص دارد و بخش های بعدی نیز به بیان مفاهیم پایه احتمالی و قابلیت اعتماد که در نظریه قابلیت اعتماد مفید می باشد می پردازد.

۲.۱ مفاهیم احتمال

در این بخش به اختصار به یادآوری نکات اساسی از مباحث احتمال که با آنها آشنایی کامل دارید، اشاره میشود.

تعریف ۱.۲.۱. گوییم تابع X از Ω به $\mathbb{R}$ یک متغیر تصادفی است اگر برای هر B متعلق به مجموعه برل $\mathcal{B}$ مجموعه $\{\omega : X(\omega) \in B\}$ متعلق به $\mathcal{A}$ باشد(یعنی یک پیشامد باشد). لازم به ذکر است که سه تایی $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ را فضای احتمال یا مدل احتمال گویند.
پیشامد $\{\omega : X(\omega) \in B\}$ را با نماد $\{X \in B\}$ نشان داده و از آن به عنوان توزیع احتمالی X یاد می کنند.

تعریف ۲.۲.۱. متغیر تصادفی گسسته: گوییم X یک متغیر گسسته است اگر مجموعه شمارای $S_x = \{x_۱, x_۲, ...\}$، $x_i \in \mathbb{R}$ و $i = ۱, ۲, ...$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\sum_i P(X = x_i) = ۱.$$

$P(X = x_i)$ را با نماد $f(x_i)$ نمایش و تحت عنوان تابع احتمال X شناخته می شود.

متغیر تصادفی پیوسته: برای متغیر تصادفی X، اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$،

$$P(X = x) = ۰,$$

آن‌گاه X یک متغیر تصادفی پیوسته می باشد. علاوه بر آن اگر تابع غیرمنفی f از $\mathbb{R}$ از $\mathbb{R}$ وجود داشته باشد که برای هر $B \in \mathcal{B}$،

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx$$

آنگاه X را یک متغیر تصادفی (مطلقاً)پیوسته گویند. در این صورت تابع f را تابع چگالی X گویند. توجه داشته باشید

$$P(X \in B) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = ۱.$$

بطور کلی اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد، داریم:

$$\int_B f(x)d\mu(x) = \sum_{x \in B \cup S(x)} f(x)$$

و اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، داریم:

$$\int_B f(x)d\mu(x) = \int_B f(x)dx$$

تابع توزیع: تابع F از $\mathbb{R}$ به فاصله $[۰, ۱]$ را که برای هر $x \in \mathbb{R}$ با ضابطه زیر تعریف می شود،

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)d\mu(x)$$

تابع توزیع X گویند که دارای ویژگی های ذیل می باشد:

۱. $۰ \leq F(x) \leq ۱$؛

۲. اگر $x_۱ \leq x_۲$، آنگاه $F(x_۱) \leq F(x_۲)$؛

۳.تابع توزیع از راست پیوسته است؛

۴. $F(\infty) = 1, F(-\infty) = 0$؛
۵. در حالت پیوسته

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

و در حالت گسسته با مقادیر ممکن $x_1 < x_2 < ...$ داریم:

$$f(x_i) = P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}).$$

تابع $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_k)$ از Ω به $\mathbb{R}^k$ یک متغیر تصادفی k- بُعدی گویند اگر برای هر $B \in \mathcal{B}^k$ مجموعه $\{\omega : \mathbf{X}(w) \in B\}$ متعلق به $\mathcal{A}$ باشد. به عبارت دیگر $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_k)$ یک بردار تصادفی است اگر $X_1, ..., X_k$ متغیرهای تصادفی باشند.

پیشامد $\{\omega : \mathbf{X}(w) \in B\}$ را با نماد $(\mathbf{X} \in B)$ و احتمال آن را با نماد $P(\mathbf{X} \in B)$ نمایش داده و از آن به عنوان توزیع احتمالی $\mathbf{X}$ یاد می شود.

$\mathbf{X}$ را یک بردار تصادفی گسسته گویند اگر مجموعه شمارایی $S_{\mathbf{X}} = \{x_1, x_2, ...\}$ از $x_i \in \mathbb{R}^k$، وجود داشته باشد به گونه ای که

$$\sum_i P(\mathbf{X} = \mathbf{x}_i) = 1.$$

$P(\mathbf{X} = \mathbf{x}_i)$ را با نماد $f(\mathbf{x}_i)$ نمایش داده و تحت عنوان تابع احتمال $\mathbf{X}$ و یا تابع احتمال توام $X_1, ..., X_k$ یاد می شود.

تابع F از $\mathbb{R}^k$ به فاصله $[0, 1]$ را که برای هر $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= P(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, ..., X_k \leq x_k) \\ &= \int_{-\infty}^{x_k} ... \int_{-\infty}^{x_1} f(t_1, ..., t_k) dt_1 ... dt_k \end{aligned}$$

تابع توزیع یا تابع توزیع توام $X_1, .., X_k$ می نامند.

اگر X متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال(یا تابع احتمال) f و تابع توزیع F باشد، در صورت وجود، امید X را با نماد $E(X)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می شود:

الف) اگر X متغیر تصادفی گسسته باشد، داریم:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)d\mu(x) = \sum_x xf(x)$$

ب) اگر X متغیر تصادفی پیوسته باشد، داریم:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)d\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

نماد دیگری که برای نمایش امیدریاضی X به خصوص در حالت پیوسته به کار می رود به صورت زیر می باشد:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xdF(x)$$

لم ۱.۲.۱. فرض کنید X متغیری تصادفی نامنفی باشد، آنگاه

$$E(X) = \sum_x P(X \geq x)$$

$$E(X) = \int_{0}^{\infty} P(X > x)dx$$

۱.۲.۱ متغیر های تصادفی و آماره های ترتیبی

در آمار، آماره k اُم یک نمونه آماری برابر با کوچک ترین مقدار k اُم آن است. آماره های ترتیبی یکی از ابزارهای اساسی در آمار ناپارامتری محسوب می شود.
فرض کنید $X_1, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از جمعیتی با تابع توزیع $F(x)$ و

تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد. با تعریف

$$
\begin{aligned}
X_{1:n} &= \text{کوچکترین بین } X_1, ..., X_n \\
X_{2:n} &= \text{دومین کوچکترین بین } X_1, ..., X_n \\
&\vdots \\
X_{j:n} &= j - \text{اُمین کوچکترین بین } X_1, ..., X_n \\
X_{n:n} &= \text{بزرگترین بین } X_1, ..., X_n
\end{aligned}
$$

مقادیر مرتب شده $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq ... \leq X_{n:n}$ را آماره های ترتیبی نمونه تصادفی $X_1, ..., X_n$ می‌نامیم. در حقیقت $X_{1:n}, ..., X_{n:n}$ مقادیر مرتب شده نمونه تصادفی $X_1, ..., X_n$ از کوچک به بزرگ اند. می دانیم که

- تابع چگالی احتمال توام $X_{1:n}, ..., X_{n:n}$ برابر است با

$$f_{X_{1:n},...,X_{n:n}}(x_1, ..., x_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f(x_i), \quad x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$$

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید که $X_1, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی با تابع توزیع مشترک F باشند و $X_{1:n}, ..., X_{n:n}$ آماره های مرتب این نمونه تصادفی باشد، تابع چگالی و توزیع i امین آماره مرتب بصورت زیر تعریف می‌شود

$$f_{r:n}(t) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r-1)!} F^{r-1}(t)(1-F(t))^{n-r-1} f(t)$$

$$F_{r:n}(x) = \sum_{j=r}^{n} \binom{n}{j} \{F(x)\}^j \left\{\overline{F}(x)\right\}^{n-j} \qquad r = 1, ..., n \qquad (1.1)$$

که در آن $\overline{F} = 1 - F$

معادله (۱-۱) را میتوان بصورت زیر نیز نوشت

$$F_{r:n}(t)=\sum_{j=r}^{n}(-1)^{j-r}\binom{n}{j}\binom{j-1}{r-1}F_{j:j}(t) \tag{۲.۱}$$

دوگان رابطه‌ی ۲.۱ ، بصورت زیر است

$$F_{n-r+1:n}(t)=\sum_{j=r}^{n}(-1)^{j-r}\binom{n}{j}\binom{j-1}{r-1}F_{1:j}(t) \tag{۳.۱}$$

رابطه فوق، بصورت زیر نیز نوشته می شود

$$F_{r:n}(t)=\sum_{j=n-r+1}^{n}(-1)^{j-n+r-1}\binom{n}{j}\binom{j-1}{r-1}\overline{F}_{1:j}(t) \tag{۴.۱}$$

اگر X_i ها، مستقل و هم توزیع باشند، تابع بقاء r اُمین آماره ترتیبی به شرح زیر می باشد:

$$\overline{F}_{r:n}(t)=P(X_{r:n}>t)=\sum_{j=0}^{r-1}\binom{n}{j}F^{j}(t)\overline{F}^{n-j}(t) \tag{۵.۱}$$

همچنین

$$\overline{F}_{n-r+1:n}(t)=\sum_{j=r}^{n}(-1)^{j-r}\binom{n}{j}\binom{j-1}{r-1}\overline{F}_{1:j}(t) \tag{۶.۱}$$

اثبات روابط در قسمت پیوست آمده است.
تابع چگالی r امین و s اُمین آماره مرتب

$$\begin{aligned}f_{r:n,s:n}(x,y)&=\frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}\\&\quad\times F^{r-1}(x)(F(y)-F(x))^{s-r-1}(1-F(y))^{n-s}f(x)f(y)\end{aligned}$$

اگر A_i را پیشامد اینکه حداقل i تا از X_i کمتر از x باشد و B_j را پیشامد اینکه حداقل j تا از X_i کمتر از y باشد، تعریف شود همچنین اگر $x \leq y$؛ با انتگرال گیری از رابطه فوق، داریم:

$$F_{r:n,s:n}(x,y) = P(A_r B_s) = \sum_{j=s}^{n} \sum_{i=r}^{n} P(A_i B_j)$$

از آنجایی که $r \leq s$، داریم:

$$\begin{aligned} F_{r:n,s:n}(x,y) = & \sum_{j=s}^{n} \sum_{i=r}^{j} \frac{n!}{i!(j-i)!(n-j)!} \\ & \times F^{i}(x)\{F(y)-F(x)\}^{j-i}\{۱-F(y)\}^{n-j} \end{aligned}$$

برای $x \geq y$؛ نامساوی $X_{s:n} \leq y$ ، $X_{r:n} \leq x$ را نتیجه می دهد، بنابراین داریم:

$$F_{s:n,r:n}(x,y) = F_{s:n}(y)$$

تابع بقاء توام r اُمین و s امین آماره مرتب به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \overline{F}_{r,k} &= P(X_{r:n} > t, X_{k:n} > s) \\ &= \sum_{i=۰}^{r-۱} \binom{n}{i} F^{i}(t) \sum_{j=۰}^{k-i-۱} \binom{n-i}{j} [\overline{F}(t)-F(s)]^{j} \overline{F}^{n-i-j}(s) \end{aligned}$$

تعریف ۱.۲.۴. متغیرهای $X_۱, ..., X_n$ را تصادفی تعویض پذیر گویند هرگاه به ازای تمام جایگشت‌های $\boldsymbol{\pi} = (\pi_۱, ..., \pi_n)$ از مجموعه‌ی $\{۱, ..., n\}$، تابع توزیع توام آنها یکسان باشد؛ بعبارت دیگر

$$P(X_۱ \leq t_۱, ...X_n \leq t_n) = P(X_{\pi_{(۱)}} \leq t_n, ..., X_{\pi_{(n)}} \leq t_n)$$

تعریف ۱.۲.۵. فرض کنید $X_۱, ..., X_n$ متغیرهای تصادفی تعویض پذیر می باشد.

آنگاه تابع چگالی توام $X_{1:n}, ..., X_{n:n}$ به شرح زیر می‌باشد:

$$f_{X_{1:n},...,X_{n:n}}(\mathbf{x}) = n! f_{1,...,X_n}(\mathbf{x}) \; ; x_1 < x_2 < ... < x_n$$

بنابراین تابع بقاء r اُمین آماره مرتب به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}\overline{F}_{r:n}(t) &= P(X_{r:n} > t) \\ &= \sum_{j=0}^{r-1} \binom{n}{j} P(X_1 \le t_1, ..., X_j \le t, X_{j+1} > t, ..., X_n > t)\end{aligned}$$

داریم:

$$\begin{aligned}\overline{F}_{r:n}(t) &= \sum_{j=n-r+1}^{n} (-1)^{j-n+r-1} \binom{j-1}{n-r} \binom{n}{j} \overline{F}_{1:n}(t) \\ &= \sum_{j=n-r+1}^{n} (-1)^{j-n+r-1} \binom{j-1}{n-r} \binom{n}{j} \overline{F}(t, ..., t, -\infty, ..., -\infty) \\ &= 1 - \sum_{j=r}^{n} (-1)^{j-r} \binom{j-1}{r-1} \binom{n}{j} F(t, ..., t, \infty, ..., \infty)\end{aligned}$$

فرض کنید $X_1, ..., X_n$ متغیر های تصادفی تعویض پذیر باشند. آنگاه برای $s > t$، تابع توزیع توام r اُمین و s اُمین آماره مرتب به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned}\overline{F}_{r,k} &= P(X_{r:n} > t, X_{k:n} > s) \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{k-i-1} \binom{n-i}{j} \\ &\times P(X_1 \le t_1, ..., X_i \le t, t < X_{i+1} < s, ..., t < X_{i+j} < s, \\ &X_{j+i+1} > s, ..., X_n > s)\end{aligned}$$

۱.۲.۲ تابع لگاریتمی- مقعر

تعریف ۱.۲.۶. تابع لگاریتمی - مقعر: تابع f را لگاریتمی - مقعر گویند هرگاه مشتق دوم $logf$ نامنفی باشد.
توابع لگاریتمی - مقعر ، یک نمایی هستند، یعنی آنها بروی برخی از نقاط غیر نزولی و ما قبل آن نقاط غیر صعودی هستند.

لم ۱.۲.۲. اگر f تابع لگاریتمی - مقعر باشد، آنگاه F و $\overline{F}$ نیز لگاریتمی - مقعر است.

لم ۱.۲.۳. اگر f تابع لگاریتمی - مقعر باشد، آنگاه نرخ خطر صعودی و نرخ خطر معکوس نزولی است.

۱.۳ مفاهیم مقدماتی در قابلیت اعتماد

مفهوم و تعریف قابلیت اعتماد از دیدگاه مهندسی متفاوت ولی در یک راستا است. قابلیت اعتماد یک دستگاه؛ بیانگر قابلیت استفاده از یک دستگاه برای مدت مشخصی؛ و ظرفیت طراحی، تولید و نگهداری یک دستگاه به منظور انجام وظایف در یک مقطع زمانی می باشد. همچنین می‌توان مقاومت در برابر خرابی یک دستگاه در طول زمان را قابلیت اعتماد یک دستگاه تعریف کرد. به علاوه مفاهیمی چون «احتمال آنکه یک دستگاه در یک بازه از زمان، فعال باشد.»، «تعیین متوسط طول عمر یک دستگاه.» و « تعیین زمان خرابی یک دستگاه» در حوزه قابلیت اعتماد می‌باشد. لذا نظریه قابلیت اعتماد، مرتبط با طول عمر دستگاه و زمان خرابی آن است.

در این میان برای تحلیل بقا و تعیین توزیع احتمالی طول عمر هر مولفه یا سیستم، از توابع احتمال مختلفی ممکن است استفاده شود. البته باید توجه داشت که از آنجایی که طول عمر، شامل مقدارهای مثبت است، باید تکیه متغیر تصادفی و توزیع آن شامل مقدارهای مثبت (به همراه صفر) باشد. در این میان توزیع‌های زیر می‌توانند مفید به نظر آیند.

۱. توزیع نمایی [۱] می‌تواند قانون احتمال برای متغیر تصادفی مربوط به زمان رسیدن به اولین رخداد (موفقیت یا شکست) را نشان دهد. بنابراین در بیشتر موارد برای

[۱] Exponential Distribution

نشان دادن طول عمر بخصوص برای قطعات الکترونیکی از این توزیع استفاده می‌شود. خاصیت عدم حافظه یکی از خصوصیات جالب این توزیع است.

۲. توزیع یکنواخت [۲] از نوع پیوسته مدنظر است. اگر بازه‌ای که برای تکیه‌گاه این متغیر تصادفی در نظر گرفته‌ایم شامل مقدارهای مثبت باشد، از این متغیر تصادفی برای تعیین طول عمر قطعات می‌توانیم استفاده کنیم.

۳. توزیع نرمال بریده شده، [۳] به عنوان نوعی از توزیع نرمال است که از یک یا دو طرف محدود شده است. در مواردی که با داده‌های مثلا طول عمر مواجه هستیم از این توزیع می‌توان استفاده کرد.

۴. توزیع لاگ نرمال، [۴] نیز یکی دیگر از انواع توزیع‌های استخراج شده از توزیع نرمال است. اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع لاگ نرمال باشد، آنگاه توزیع $Y = Ln(X)$ نرمال است. در نتیجه تکیه‌گاه متغیر تصادفی X مقدارهای مثبت بوده و می‌تواند به عنوان متغیر تصادفی بیان کننده طول عمر به کار رود.

قابلیت اعتماد یک قطعه(دستگاه)؛ یعنی احتمال اینکه آن قطعه(دستگاه) بطور رضایت بخشی برای حداقل یک مدت زمان مشخصی، زمانیکه تحت شرایط معینی استفاده می شود، کار کند."یا احتمال بقاء". اغلب عدم قابلیت اعتماد به احتمال خرابی اشاره دارد.

$$R(t) = \overline{F}(t) = P(X > t)$$

قابلیت اعتماد(احتمال بقاء) یک واحد زنده متناظر با زمان بقاء x ، بوسیله $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ تعریف می شود. F توزیع عمر واحد(قطعه) است. قابلیت اعتماد یک قطعه به شرط اینکه تا زمان t قطعه سالم باشد، برابر با

$$\overline{F}(x|t) = \frac{\overline{F}(x+t)}{\overline{F}(t)} \qquad \overline{F}(t) > 0$$

مشابها، احتمال شرطی خرابی در طی فاصله زمانی بطول x یک قطعه که t واحد زمان

[۲] Uniform Distribution

[۳] Truncated Normal Distribution

[۴] Log-normal Distribution

کار کرده است برابر است با

$$F(x|t) = \frac{F(t+x) - F(t)}{\overline{F}(t)} = 1 - \overline{F}(x|t)$$

«نرخ شکست» [۵] و «تحلیل بقا»، [۶] بخش‌هایی از نظریه قابلیت اعتماد هستند که به طول عمر و نرخ خرابی یا شکست مولفه‌ها می‌پردازند. نرخ شکست، بیانگر فراوانی خرابی یک مولفه است. مشخص است که نرخ شکست متناسب با زمان تغییر می‌کند. برای مثال نرخ شکست (خرابی) یک خودرو در سال پنجم عمرش بسیار بیشتر از سال اول است. به این ترتیب احتمال آنکه قطعه‌ای مانند جعبه دنده، اگزوز و ... از خودرو خراب شود در سال پنجم بیشتر از سال اول است. البته می توان در نظر گرفت که در زمان یا دوره گارانتی ممکن است نرخ شکست صعودی باشد ولی در پایان دوره گارانتی، نرخ شکست نزولی بوده و در یک دوره که تقریبا متوسط عمر خودرو را شامل می‌شود، ثابت است. در انتهای دوره طول عمر خودرو، میزان اشکلات خودرو افزایش یافته و باعث کوتاه‌تر شدن طول عمر آن خواهد شد.

نرخ خرابی شرطی، $r(t)$ در زمان t را، می توان بصورت زیر نوشت

$$r(t) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} . \frac{F(t+x) - F(t)}{\overline{F}(t)}$$

تعریف ۱.۳.۱. اگر متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع مطلقا پیوسته F و چگالی f باشد بنابراین تابع r بر روی $(-\infty, \infty)$ ، بصورت زیر تعریف می شود

$$r(t) = \begin{cases} \frac{f(t)}{\overline{F}(t)} & \overline{F}(t) > 0 \\ \infty & \overline{F}(t) = 0 \end{cases}$$

نرخ خطر F یا نرخ خطر X نامیده می شود و نرخ خطر معکوس متغیر X بصورت زیر تعریف می شود

[۵] Failure Rate

[۶] Survival Analysis

$$r^{-1}(t) = \begin{cases} \frac{f(t)}{F(t)} & F(t) > ۰ \\ \infty & F(t) = ۰ \end{cases}$$

نامهای دیگر نرخ خطر، نرخ خرابی و نرخ شدت و نیرو قابلیت نیز هست. اتحاد های مفیدی بسهولت بوسیله انتگرال گیری از طرفین معادله نرخ خطر بدست می آید

$$\int_{۰}^{x} r(t)dt = -log\overline{F}(t)$$

بنابراین

$$\overline{F}(t) = exp\{-\int_{۰}^{x} r(t)dt\} \qquad (۷.۱)$$

نرخ خطر تجمی، $R(x) = \int_{۰}^{x} r(t)dt$ ، تابع ریسک نامیده می‌شود. معادله (۶.۱) یک فرمول تئوریکی مفید از قابلیت اعتماد بصورت تابعی از نرخ خطر ارائه می‌دهد. بنابراین

$$\overline{F}(t) = e^{-R(x)}$$

قابلیت اعتماد را برحسب ریسک ارائه می دهد. بعنوان یک نتیجه ما بدست می‌آوریم

$$r(t) = \lim_{x \to ۰} \frac{۱}{x}\{۱ - \frac{\overline{F}(x+t)}{\overline{F}(t)}\}$$

زمانی که f وجود داشته باشد و $r(t)$ تابعی افزایشی باشد، آنگاه

$$\overline{F}(x|t) = exp\{-\int_{t}^{t+x} r(u)du\} \qquad (۸.۱)$$

تابعی کاهشی در $t \geq ۰$ ، برای هر $x \geq ۰$.

تعریف ۲.۳.۱. F یک تابع توزیع دارای نرخ خطر افزایشی(IFR) است اگر F در معادله (۷.۱) صدق کند، یعنی $\overline{F}(x|t)$ تابعی کاهشی از t باشد؛ بعبارت دیگر $r(t)$ تابعی افزایشی از t باشد.

تعریف ۱.۳.۳. F دارای نرخ خطر نزولی است، هرگاه $\overline{F}(x|t)$ تابعی افزایشی از t باشد؛ بعبارت دیگر $r(t)$ تابعی نزولی از t باشد.

لم ۱.۳.۱. اگر f یک چگالی بر روی فاصله $[0,\infty)$ باشد، اگر $logf$ محدب باشد، بنابراین تابع توزیع F ، DFR است و برعکس اگر $logf$ مقعر باشد، آنگاه تابع توزیع F ، IFR است.

نکته ۱.۳.۱. اگر نرخ خطر یک متغیر تصادفی تابعی صعودی (نزولی) از t باشد، آنگاه نرخ خطر معکوس آن متغیر تابعی صعودی (نزولی) از t است.

۴.۱ ترتیب های تصادفی

ترتیب ها و نابرابری های تصادفی و نابرابریها در طی سال های اخیر با سرعت بیشتری در بسیاری از زمینه های متنوع احتمال و آمار مورد استفاده قرار گرفته است که این حوزه‌ها شامل تئوری قابلیت اطمینان ، نظریه صف بندی، آنالیز بقا ، زیست شناسی ، اقتصاد ، بیمه ، تحقیقات عملیاتی و علم مدیریت است. در این بخش، برخی از ترتیب های تصادفی که موقعیت و شدت متغیر های تصادفی را مقایسه می کنند، مروری مختصر می شوند. چند ترتیب مهم و رایج که در این بخش مورد بحث قرار گرفته اند؛ ترتیب تصادفی معمولی $(\leq_{st})$ ، ترتیب نرخ خطر $(\leq_{hr})$ ترتیب نرخ خطر معکوس، $(\leq_{rh})$ و ترتیب نسبت درستنمایی $(\leq_{lr})$ می باشند.

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید X و Y متغیر های تصادفی بترتیب دارای توابع توزیع مطلقا پیوسته F ، G و چگالی های f ، g باشند، آنگاه:

۱) X را در ترتیب تصادفی معمولی کوچکتر از Y گویند و بوسیله $X \leq_{st} Y$ نشان داده می شود، هرگاه

$$P(X > t) \leq P(Y > t)$$

۲) X را در ترتیب نرخ خطر کمتر از Y گویند و بوسیله $X \leq_{hr} Y$ نشان داده می شود، هرگاه $\frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)}$ تابعی نزولی از x باشد.

۳) X را در ترتیب نرخ خطر معکوس کمتر از Y گویند و بوسیله $X \leq_{rh} Y$ نشان داده می شود، هرگاه $\frac{F(x)}{G(x)}$ تابعی نزولی از x باشد.

۴− X را در ترتیب نسبت درستنمایی کمتر از Y گویند و بو سیله $X \leq_{lr} Y$ هرگاه