به نام خدا

ریاضیات کنکور تجربی

ریاضی یازدهم

مولف :

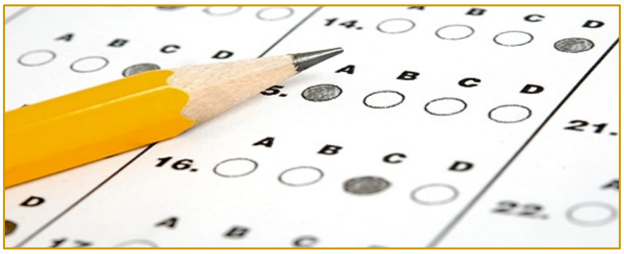
فرهاد شعبانی

انتشارات ارسطو
(سازمان چاپ و نشر ایران – ۱۴۰۲)
نسخه الکترونیکی این اثر در سایت سازمان چاپ و نشر ایران و اپلیکیشن کتاب رسان موجود می باشد
chaponashr.ir

سرشناسه : شعبانی، فرهاد، ۱۳۶۶
عنوان و نام پدیدآور : ریاضیات کنکور تجربی (ریاضی یازدهم) / مولف فرهاد شعبانی.
مشخصات نشر : ارسطو (سامانه اطلاع رسانی چاپ و نشر ایران)، ۱۴۰۲.
مشخصات ظاهری : ۲۵۶ ص.
شابک : ۲-۱۵۵-۳۳۹-۶۲۲-۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی : فیپا
موضوع : آموزش ریاضی
رده بندی کنگره : HD۶۲/۲
رده بندی دیویی : ۶۵۸/۱۲
شماره کتابشناسی ملی : ۹۱۸۱۸۲۲
اطلاعات رکورد کتابشناسی : فیپا

نام کتاب : ریاضیات کنکور تجربی (ریاضی یازدهم)
مولف : فرهاد شعبانی
ناشر : ارسطو (سامانه اطلاع رسانی چاپ و نشر ایران)
صفحه آرایی، تنظیم و طرح جلد: پروانه مهاجر
تیراژ : ۱۰۰۰ جلد
نوبت چاپ : اول – ۱۴۰۲
چاپ : زبرجد
قیمت : ۲۱۰۰۰۰ تومان
فروش نسخه الکترونیکی – کتاب‌رسان :
https://chaponashr.ir/ketabresan
شابک : ۲-۱۵۵-۳۳۹-۶۲۲-۹۷۸
تلفن مرکز پخش : ۰۹۱۲۰۲۳۹۲۵۵
www. chaponashr. ir

انتشارات ارسطو



آمادگی کنکور

ریاضی یازدهم تجربی

کنکور
ریاضی یازدهم

۱

هندسه تحلیلی و جبر

۱ دستگاه مختصات

در این بخش اطلاعات ضروری در مورد نقاط در دستگاه مختصات را می‌آوریم.

نکته ۱

در دستگاه مختصات:

- مختصات هر نقطه روی محور x ها به صورت $(x,\text{۰})$ و مختصات هر نقطه روی محور y ها به صورت $(\text{۰},y)$ است.
- فاصله‌ی نقاط $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ یعنی طول پاره خط AB برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

بویژه: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_1,y_1)$ از مبدأ برابر است با:

$$OA=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

- مختصات نقطه‌ی M وسط پاره خط AB به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$x_M=\frac{x_1+x_2}{2}\quad,\quad y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$$

برای نمونه؛

در مثلث با رئوس مبدأ، $A(\text{۴},\text{۵})$ و $B(\text{۲},\text{۱})$، طول میانه‌ی OM را حساب می‌کنیم. تعیین مختصات نقطه‌ی M وسط ضلع AB:

$$x_M=\frac{\text{۲}+\text{۴}}{\text{۲}}=\text{۳}\quad,\quad y_M=\frac{\text{۱}+\text{۵}}{\text{۲}}=\text{۳}\quad\to\quad M(\text{۳},\text{۳})$$

طول میانه‌ی OM، همان فاصله‌ی M از نقطه‌ی O (یعنی مبدأ) برابر است با:

$$OM=\sqrt{\text{۳}^2+\text{۳}^2}=\sqrt{\text{۱۸}}=\text{۳}\sqrt{\text{۲}}$$

اگر $A(\text{۴},\text{۴})$ و $B(\text{۱},\text{۱})$ دو رأس متقابل یک مربع باشند، مساحت مربع کدام است؟

❶ ۸ ❷ ۹ ❸ ۱۰ ❹ ۱۱

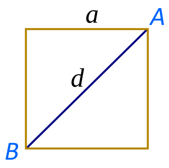
گزینه ۲

فاصله‌ی دو رأس متقابل، همان طول قطر مربع است:

$$d=\sqrt{(\text{۴}-\text{۱})^2+(\text{۴}-\text{۱})^2}=\sqrt{\text{۹}+\text{۹}}=\sqrt{\text{۱۸}}$$

چون بین قطر d و ضلع a در مربع، همیشه رابطه‌ی $d=a\sqrt{\text{۲}}$ وجود دارد، در نتیجه:

$$a=\frac{d}{\sqrt{\text{۲}}}=\frac{\sqrt{\text{۱۸}}}{\sqrt{\text{۲}}}\Rightarrow S=a^2=\frac{\text{۱۸}}{\text{۲}}=\text{۹}$$



دو انتهای یکی از قطرهای مستطیلی $A(۱,۷)$ و $C(-۴,۱۹)$ هستند. اگر زاویه‌ی بین دو قطر ۳۰° باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

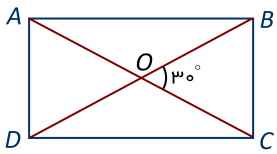
❶ $\frac{۱۶۹}{۴}$　❷ ۱۶۹　❸ $\frac{۱۶۹}{۲}$　❹ $\frac{۱۶۹\sqrt{۳}}{۴}$

گزینه ۱

می‌دانیم قطرها برابرند و یکدیگر را نصف می‌کنند.

$$AC=\sqrt{(-۴-۱)^۲+(۱۹-۷)^۲}=\sqrt{۲۵+۱۴۴}=۱۳ \Rightarrow OC=\frac{۱۳}{۲}$$

پس $OB=\frac{۱۳}{۲}$ بوده و با توجه به این که قطرها، چهار مثلث هم مساحت می‌سازند:



$$S_{\overset{\triangle}{OBC}}=\frac{۱}{۲}\times OB\times OC\times \sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۳}{۲}\times\frac{۱۳}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱۶۹}{۱۶}$$
$$\Rightarrow S_{ABCD}=۴\times\frac{۱۶۹}{۱۶}=\frac{۱۶۹}{۴}$$

تعیین نوع مثلث:

اگر سه رأس مثلث داده شوند، با محاسبه‌ی طول اضلاع، نوع مثلث معلوم می‌شود:

متساوی اضلاع　یا　متساوی الساقین　یا　مختلف الاضلاع

بعلاوه:

اگر توان دوم ضلع بزرگ‌تر، با مجموع توان دوم‌های دو ضلع دیگر برابر بود، طبق رابطه‌ی فیثاغورس $(a^۲=b^۲+c^۲)$ مثلث قائم الزاویه است.

نقاط $A(۱,۲)$، $B(۲,-۱)$ و $C(-۱,-۱)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. نوع این مثلث کدام است؟

❶ متساوی الاضلاع　❷ متساوی الساقین　❸ قائم الزاویه　❹ هیچکدام

گزینه ۴

طول سه ضلع را تعیین می‌کنیم:

$$AB=\sqrt{(۲-۱)^۲+(-۱-۲)^۲}=\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۱۰}$$
$$AC=\sqrt{(-۱-۱)^۲+(-۱-۲)^۲}=\sqrt{۴+۹}=\sqrt{۱۳}$$
$$BC=\sqrt{(-۱-۲)^۲+(-۱+۱)^۲}=\sqrt{۹+۰}=۳$$

ضلع‌ها نابرابرند و بنابراین قائم‌الزاویه بودن مثلث را بررسی می‌کنیم:

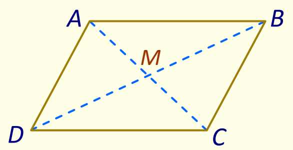
$$(\sqrt{۱۳})^۲\neq(\sqrt{۱۰})^۲+(۳)^۲$$

در نتیجه مثلث قائم‌الزاویه هم نیست.

چون در متوازی الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند:

نکته ۲

اگر چهارضلعی $ABCD$ یک متوازی الاضلاع باشد، آنگاه:



$$\left.\begin{array}{l} x_M=\dfrac{x_A+x_C}{۲} \\ x_M=\dfrac{x_B+x_D}{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad x_A+x_C=x_B+x_D$$

به صورت مشابه داریم:

$$y_A+y_C=y_B+y_D$$

توجه کنید:

خاصیت فوق در مورد مربع، مستطیل و لوزی نیز برقرار است.

نقاط $A(-۳,۲)$ و $B(-۱,۲)$ دو رأس متوازی الاضلاع $ABCD$ بوده و $M(۱,-۱)$ محل برخورد قطرهای آن است. طول ضلع AD کدام است؟

❶ $\sqrt{۲}$ ❷ $۶\sqrt{۲}$ ❸ $\sqrt{۶}$ ❹ $۳\sqrt{۶}$

گزینه ۲

به شکل متوازی الاضلاع بالا نگاه کنید؛

چون نقطه‌ی M وسط پاره‌خط BD است، ابتدا مختصات نقطه‌ی D را تعیین می‌کنیم:

$$x_M=\frac{x_B+x_D}{۲} \rightarrow ۱=\frac{-۱+x_D}{۲} \rightarrow -۱+x_D=۲ \rightarrow x_D=۳$$

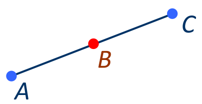
$$y_M=\frac{y_B+y_D}{۲} \rightarrow -۱=\frac{۲+y_D}{۲} \rightarrow ۲+y_D=-۲ \rightarrow y_D=-۴$$

اکنون با داشتن مختصات نقاط A و D، طول ضلع AD محاسبه می‌شود:

$$AD=\sqrt{(۳-(-۳))^۲+(-۴-۲)^۲}=\sqrt{۳۶+۳۶}=\sqrt{۷۲}=۶\sqrt{۲}$$

قرینه‌ی نقاط:

اگر C قرینه A نسبت به نقطه‌ی B باشد، طبق شکل:



نقطه‌ی B باید وسط پاره‌خط AC باشد و بنابراین: $x_B=\dfrac{x_A+x_C}{۲}$ و $y_B=\dfrac{y_A+y_C}{۲}$.

دو نتیجه‌ی این مطلب به صورت زیر است:

- قرینه‌ی A نسبت به B دارای مختصات زیر است:

$$(۲x_B-x_A\,,۲y_B-y_A)$$

❖ در حالت خاص، قرینه‌ی A نسبت به مبدأ:

$$A'=(۲(۰)-x_A,۲(۰)-y_A) \Rightarrow A'=(-x_A,-y_A)$$

اگر نقطه‌ی $B(k,-۳k+۱)$ قرینه‌ی $A(۵,m-۱)$ نسبت به مبدأ باشد، مقدار $m-k$ کدام است؟

❶ -۲۰ ❷ -۱۰ ❸ ۱۰ ❹ ۲۰

گزینه ۲

طبق مطلب بالا باید داشته باشیم:

$$x_B=-x_A \Rightarrow k=-۵$$

$$y_B=-y_A \rightarrow -۳k+۱=-(m-۱) \xrightarrow{k=-۵} \rightarrow ۱۶=-m+۱ \Rightarrow m=-۱۵$$

در نتیجه:

$$m-k=-۱۵+۵=-۱۰$$

-----------◈-----------

قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۳a+۱,a+۳)$ نسبت به نقطه‌ی $B(۲a,۲-a)$ روی خط $۲x-۳y=۶$ قرار دارد. طول AB کدام است؟

❶ ۴ ❷ ۵ ❸ $\sqrt{۱۳}$ ❹ $\sqrt{۳۴}$

گزینه ۳

تعیین مختصات نقطه‌ی قرینه:

$$A'=(۲(۲a)-(۳a+۱),۲(۲-a)-(a+۳))=(a-۱,-۳a+۱)$$

جایگذاری در معادله‌ی خط:

$$۲(a-۱)-۳(-۳a+۱)=۶ \rightarrow ۱۱a-۵=۶ \Rightarrow a=۱$$

بنابراین $A(۴,۴)$ و $B(۲,۱)$ بوده و:

$$AB=\sqrt{(۲-۴)^۲+(۱-۴)^۲}=\sqrt{۴+۹}=\sqrt{۱۳}$$

-----------◈-----------

0916 992 5753 farhad.shabani66

۲ معادله‌ی خط

معرفی ساده‌ترین معادله در صفحه را ببینید.

نکته ۳

معادله‌ی خط:

- نمودار معادله‌ای که بر حسب x و y از درجه‌ی یک باشد، یک «**خط راست**» در صفحه است.
- شکل استاندارد معادله‌ی یک خط به صورت $ax+by+c=0$ (یا $y=mx+h$) نوشته می‌شود.

بعلاوه:

هر خط از بی‌شمار نقطه تشکیل شده و برای تعیین نقطه‌ای از آن کافی است:

- به x یا y عدد دلخواهی نسبت دهیم.
- با جایگذاری آن در معادله، برای متغیر دوم مقداری بدست آوریم.

بالاخره این که:

برای رسم یک خط کافی است دو نقطه‌ی دلخواه از آن را مشخص کرده و سپس خط گذرا از آن دو را رسم کنیم.

نقاط $A(5,2)$ و $B(-1,4)$ داده شده‌اند. به ازای کدام مقدار a خط به معادله‌ی $y=ax+7$ از وسط AB می‌گذرد؟

❶ -2　❷ -1　❸ 1　❹ 2

گزینه ۱

مختصات وسط AB به صورت $M=(2,3)$ است و باید در معادله‌ی خط صدق کند:

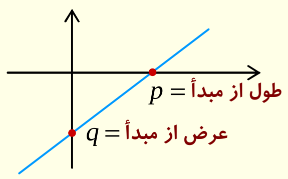
$$3=a(2)+7 \rightarrow 2a=-4 \Rightarrow a=-2$$

نکته ۴

به دو مفهوم ساده در مورد نمودار یک خط توجه کنید:

❖ طول نقطه‌ی برخورد خط با محور x ها را با p نشان داده و به آن «**طول از مبدأ**» خط گفته می‌شود.

❖ عرض نقطه‌ی برخورد خط با محور y ها را با q نشان داده و به آن «**عرض از مبدأ**» خط گویند.



بعلاوه:

این اعداد چنین محاسبه می‌شوند:

- برای تعیین عرض از مبدأ کافی است در معادله‌ی خط $x=0$ قرار گیرد.
- به‌طور مشابه، برای تعیین طول از مبدأ نیز کافی است که $y=0$ را در معادله قرار دهیم.

مساحت مثلثی که خط $x-2y=5$ با محورهای مختصات تشکیل می‌دهد، کدام است؟

❶ 5 ❷ $\frac{5}{4}$ ❸ $\frac{25}{4}$ ❹ $\frac{25}{2}$

گزینه ۲

ابتدا عرض و طول از مبدأ را حساب می‌کنیم:

$$x=0 \rightarrow -2y=5 \Rightarrow q=-\frac{5}{2}$$

$$y=0 \rightarrow x=5 \Rightarrow p=5$$

با نگاه به شکل قبل، می‌بینید که مساحت مثلث برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}|pq|=\frac{1}{2}|5\times(-\frac{5}{2})|=\frac{25}{4}$$

یک مفهوم مهم در مورد خط‌ها:

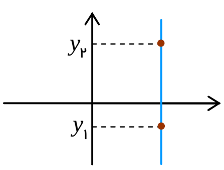
نکته ۵

اگر خطی از دو نقطه‌ی (x_1,y_1) و (x_2,y_2) عبور کند، آنگاه «**شیب**» آن عبارت است از:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\ ,\qquad (x_1\neq x_2)$$

به موارد ساده‌ی زیر توجه داشته باشید:

- اگر طول دو نقطه برابر باشد، یعنی: $x_1=x_2$، مقدار $m=\frac{y_2-y_1}{0}$ تعریف نشده است. این حالت فقط در مورد خط‌های عمودی اتفاق می‌افتد:

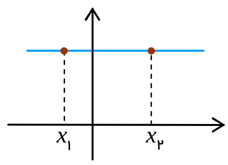


پس:

برای خط‌های عمودی، شیب تعریف نشده است.

0916 992 5753
farhad.shabani66

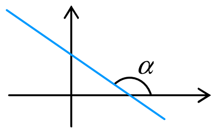
- اگر عرض‌های دو نقطه برابر باشند، یعنی: $y_1 = y_2$، آنگاه مقدار $m = \frac{0}{x_2 - x_1} = 0$ است. این حالت فقط در مورد خط‌های افقی اتفاق می‌افتد:



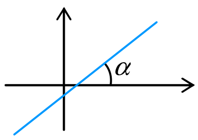
پس:

شیب هر خط افقی برابر صفر است.

- شیب خط، دقیقاً تانژانت زاویه‌ی بین خط با جهت مثبت محور طول است:



شیب منفی $m = \tan\alpha$

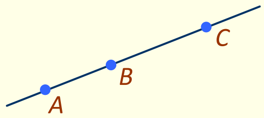


شیب مثبت $m = \tan\alpha$

یک کاربرد مفید از شیب خط‌ها:

نکته ۶

شرط آن‌که سه نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$، $B(x_2, y_2)$ و $C(x_3, y_3)$ در یک امتداد (روی یک خط راست) باشند، آن است که:



$$m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

مقدار t کدام باشد تا نقطه‌ی $M(-t, 2t-1)$ روی خط گذرا از نقاط $A(1,2)$ و $B(3,-1)$ واقع باشد؟

❶ -1 ❷ 1 ❸ 3 ❹

گزینه ۴

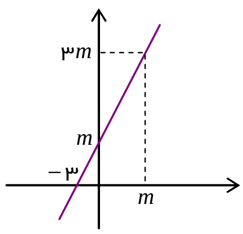
کافی است تساوی $m_{AB} = _{BM}$ به‌کار رود:

$$\frac{-1-2}{3-1} = \frac{2t-1+1}{-t-3} \rightarrow -\frac{3}{2} = -\frac{2t}{t+3} \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{2t}{t+3}$$

معادله با طرفین وسطین حل می‌شود:

$$3t + 9 = 4t \Rightarrow t = 9$$

در شکل مقابل، مقدار m کدام است؟



❶ ۶
❷ ۵
❸ ۰
❹ ۳

گزینه ۱

با توجه به سه نقطه‌ی $(-۳,۰)$ و $(۰,m)$ و $(m,۳m)$ که روی یک خط هستند:

$$\frac{۳m-۰}{m-(-۳)}=\frac{m-۰}{۰-(-۳)} \to ۹m=m^۲+۳m \to m^۲-۶m=۰ \Rightarrow m=۰,\ m=۶$$

طبق شکل باید $m>۰$ باشد.

نکته ۷

اگر معادله‌ی خط به صورت استاندارد $y=mx+h$ نوشته شده باشد:

- شیب آن ضریب x، یعنی عدد m است.
- عدد h همیشه عرض از مبدأ خط است.

شیب کدام خط از بقیه بیشتر است؟

❶ $۴x-۳y=۱$
❷ گذرا از نقاط $(-۱,۳)$ و $(۱,۲)$
❸ با محور طول زاویه‌ی ۶۰° تشکیل دهد.
❹ طول از مبدأ ۱ و عرض از مبدأ ۲ داشته باشد.

گزینه ۳

باید شیب هر کدام از خطها معلوم گردد:

- **مورد اول:** $۳y=۴x-۱ \xrightarrow{\div ۳} y=\frac{۴}{۳}x-\frac{۱}{۳} \Rightarrow m=\frac{۴}{۳}\cong ۱/۳$
- **مورد دوم:** $m=\frac{۳-۲}{-۱-۱}=-\frac{۱}{۲}$
- **مورد سوم:** $m=\tan ۶۰^\circ=\sqrt{۳}\cong ۱/۷$
- **مورد چهارم:** خط از نقاط $(۱,۰)$ و $(۰,۲)$ می‌گذرد و بنابراین: $m=\frac{۲-۰}{۰-۱}=-۲$

اکنون روش نوشتن معادله‌ی یک خط را ببینید:

نکته ۸

برای نوشتن معادله‌ی یک خط به دو مورد نیاز است:

مختصات یک نقطه روی خط و **شیب آن خط**

بعلاوه:

اگر خطی از نقطه‌ی $(x_۱,y_۱)$ گذشته و شیب آن عدد m باشد، معادله‌ی آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y-y_۱=m(x-x_۱)$$

خطی که از نقطه‌ی $(1,2)$ گذشته و شیب آن برابر 1 است، از کدام نقطه‌ی زیر می‌گذرد؟

❶ $(2,2)$ ❷ $(3,2)$ ❸ $(2,3)$ ❹ $(3,3)$

گزینه ۳

طبق روش گفته شده، معادله‌ی خط را می‌نویسیم:

$$y-2=1(x-1) \quad \rightarrow \quad y=x+1$$

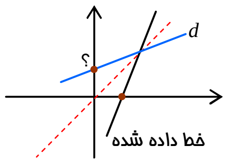
می‌بینید که فقط مختصات نقطه‌ی $(2,3)$ در این معادله صدق می‌کند.

قرینه‌ی خط $3y-2x=4$ را نسبت به خط $y=x$، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟ (کنکور ۹۷)

❶ -2 ❷ -1 ❸ 1 ❹ 2

گزینه ۱

روش اول: کافی است به شکل عمل انجام شده در تست نگاه کنید:



می‌بینید که:

عرض از مبدأ خط حاصل، همان طول از مبدأ خطی است که نسبت به نیمساز قرینه می‌شود:

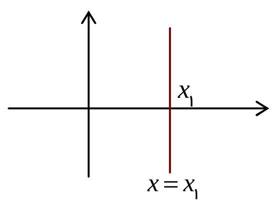
$$y=0: \quad 0-2x=4 \Rightarrow x=-2$$

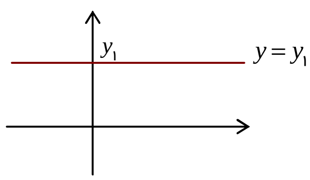
روش دوم: طبق مراحل زیر و به عهده‌ی خوانندگان درسنامه!

- مختصات دو نقطه از خط را مشخص کرده و نسبت به نیمساز $y=x$ (همیشه: با تعویض مؤلفه‌ها) قرینه کنید.
- معادله‌ی خط گذرا از دو نقطه‌ی قرینه را بنویسید.
- عرض از مبدأ خط را به‌دست آورید.

حالت‌های خاص:

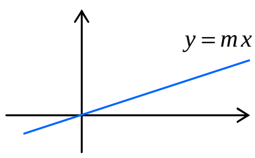
- معادله‌ی خط قائم گذرنده از نقطه‌ی معلوم (x_1,y_1) به صورت $x=x_1$ و معادله‌ی خط افقی گذرنده از (x_1,y_1) به صورت $y=y_1$ است.



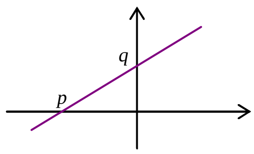


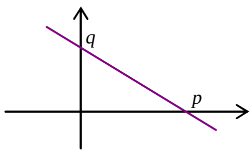
بویژه: خط $x=0$ محور y ها و خط $y=0$ معادله‌ی محور x ها است.

- معادله‌ی خطی که از مبدأ عبور کند به صورت $y=mx$ است که m شیب این خط می‌باشد.



- معادله‌ی خطی که از نقاط $(p,0)$ و $(0,q)$ عبور کند به صورت $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ است.





- معادله‌ی نیمساز ربع‌های اول و سوم به صورت $y=x$ و معادله‌ی نیمساز ربع‌های دوم و چهارم $y=-x$ است.

در خطی با طول از مبدأ ۳ و عرض از مبدأ ۱−، عرض نقطه‌ی به طول ۶ روی آن خط کدام است؟

❶ ۱ ❷ ۲ ❸ ۱− ❹ ۳

گزینه ۱

طبق مطلب قبل، معادله‌ی خط به صورت $\frac{x}{3}+\frac{y}{-1}=1$ است و در نتیجه:

$$x=6:\quad \frac{6}{3}-y=1 \Rightarrow y=1$$

توجه کنید:

نقطه‌ی برخورد دو خط ناموازی، از تشکیل دستگاه و حل آن مشخص می‌شود.

مجموع طول و عرض نقطه‌ی برخورد خطوط نمودار $x-3y-3+xy=0$ کدام است؟

❶ ۱ ❷ ۲ ❸ ۴ ❹ ۳

گزینه ۲

معادله در واقع مربوط به دو خط است:

$$x+xy-3y-3=0 \to x(1+y)-3(y+1)=0 \to (y+1)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=3 \end{cases}$$

واضح است که تقاطع این دو خط افقی و عمودی $(3,-1)$ بوده و جواب $3-1=2$ است.

0916 992 5753
farhad.shabani66

۳ خطوط موازی و عمود

شرایط موازی یا عمود بودن دو خط:

نکته ۹

دو خط $y=mx+h$ و $y=m'x+h'$ را در نظر بگیرید. این دو خط:

- موازی‌اند، هرگاه $m=m'$؛ یعنی شیب‌ها باید برابر باشند.
- بر هم عمودند، هرگاه $m'=-\frac{1}{m}$؛ یعنی شیب‌ها باید قرینه و وارون باشند.

بعلاوه:

اگر دو خط به صورت $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ داده شوند، آنگاه:

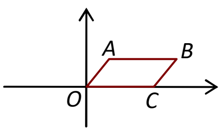
- موازی‌اند، هرگاه: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ و در غیر این صورت خط‌ها متقاطع‌اند.
- در حالت موازی، دو خط بر هم منطبق‌اند، هرگاه: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$.
- در حالت متقاطع بودن، بر هم عمودند، هرگاه: $aa'+bb'=0$.

دو ضلع OC و OA از متوازی‌الاضلاع $OABC$ به ترتیب روی محور xها و نیمساز ربع اول واقع‌اند و مختصات رأس B به صورت $B(۳,۲)$ است. مجموع طول و عرض رأس C کدام است؟

❶ ۲　❷ ۱　❸ ۳　❹ ۴

گزینه ۲

با توجه به شکل تقریبی، ضلع BC موازی نیمساز $y=x$ دارای شیب $m=1$ است و معادله‌ی آن:



$$y-۲=۱(x-۳) \rightarrow y=x-۱$$

در این خط قرار می‌دهیم: $y=0$ تا مختصات C مشخص گردد:

$$0=x-۱ \rightarrow x=۱ \Rightarrow C(۱,0)$$

دو خط $۲y-۸x=-۶$ و $۱۲x-۳y=m$ دو ضلع مقابل یک متوازی الاضلاع هستند. محدوده‌ی جواب m کدام است؟

❶ $\{۹\}$　❷ $\mathbb{R}-\{۹\}$　❸ $\mathbb{R}-\{۴,۹\}$　❹ $\mathbb{R}-\{۱,۲,۴,۹\}$

گزینه ۲

دو خط شیب برابر داشته و موازی هستند، ولی باید منطبق نباشند:

$$\left.\begin{array}{l} -۸x+۲y+۶=0 \\ ۱۲x-۳y-m=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}} \frac{-۸}{۱۲}=\frac{۲}{-۳}\neq\frac{۶}{-m} \rightarrow -۲m\neq-۱۸ \Rightarrow m\neq۹$$

به ازای کدام مقدار m دستگاه معادلات $\begin{cases} mx+y=m-۱ \\ ۳x+(m-۲)y=۴-۲m \end{cases}$ دارای بی‌شمار جواب است؟ (کنکور ۹۳)

❶ -۱ ❷ -۲ ❸ ۳ ❹ هیچ مقدار m

گزینه ۱

دستگاه وقتی بی‌شمار جواب دارد که خط‌های متناظر بر هم منطبق باشند:

$$\frac{m}{۳}=\frac{۱}{m-۲}=\frac{m-۱}{۴-۲m}$$

از حل معادله‌ی $\frac{۱}{m-۲}=\frac{m}{۳}$ مقادیر $m=-۱$ و $m=۳$ بدست می‌آیند. هر مقداری که تساوی خط بالا را به صورت کامل برقرار سازد، جواب مسأله است:

$$m=۳:\ \frac{۳}{۳}=\frac{۱}{۳-۲}\neq\frac{۳-۱}{۴-۶} \quad \text{و} \quad m=-۱:\ \frac{-۱}{۳}=\frac{۱}{-۱-۲}=\frac{-۱-۱}{۴+۲}$$

بنابراین فقط عدد -۱ قابل قبول است.

دستگاه معادلات $\begin{cases} (m-۱)x+y=m-۲ \\ ۴x+(m-۱)y=۲ \end{cases}$ فاقد جواب است. خط $(m-۲)x+my=۳$ بر کدام خط زیر عمود است؟

❶ $۲y-۳=۶x$ ❷ $۲x-۴=۶y$ ❸ $y-۵=۳x$ ❹ $y+\frac{۱}{۳}x=-۱$

گزینه ۲

دستگاه وقتی بی جواب است که خط‌های متناظر موازی و جدا از هم باشند:

$$\frac{m-۱}{۴}=\frac{۱}{m-۱}\neq\frac{m-۲}{۲}$$

از حل معادله‌ی $\frac{۱}{m-۱}=\frac{m-۱}{۴}$ مقادیر $m=-۱$ و $m=۳$ حاصل می‌شوند. برای $m=۳$ شرط بالا برقرار نیست و بنابراین فقط $m=-۱$ قابل قبول است.

$$(m-۲)x+my=۳ \xrightarrow{m=-۱} y=-۳x-۳$$

این خط فقط بر خط $۲x-۴=۶y$ با شیب $\frac{۱}{۳}$ عمود است.

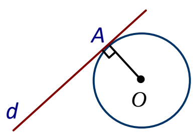
دایره به مرکز $O(۲,-۳)$ مفروض است. از نقطه‌ی $A(۸,-۵)$ واقع بر محیط دایره، خط d را مماس بر دایره رسم می‌کنیم. این خط محور x را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

❶ $(-\frac{۱۹}{۳},۰)$ ❷ $(-\frac{۲۹}{۳},۰)$ ❸ $(\frac{۲۹}{۳},۰)$ ❹ $(\frac{۱۹}{۳},۰)$

گزینه ۳

می‌دانیم خط مماس باید بر شعاع OA عمود باشد:

$$m_{OA}=\frac{-۵+۳}{۸-۲}=-\frac{۱}{۳} \Rightarrow m_d=۳$$



اکنون معادله‌ی خط d نوشته شده و تقاطع مورد نظر تعیین می‌شود:

$$y-(-5)=3(x-8) \xrightarrow{y=0} 5=3x-24 \Rightarrow x=\frac{29}{3}$$

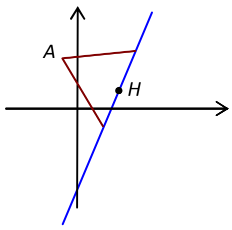
نقطه‌ی $H(2,1)$ را روی خط $3x-y=5$ در نظر بگیرید. مثلث متساوی الاضلاع ABC را با ارتفاع AH می‌سازیم، به طوری که محیط مثلث $\sqrt{270}$ واحد باشد. مختصات یک رأس A کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۰)

❶ $(\frac{7}{2},\frac{1}{2})$ ❷ $(\frac{13}{2},-\frac{1}{2})$ ❸ $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ ❹ $(-\frac{1}{2},\frac{11}{6})$

گزینه ۲

باید طول ضلع مثلث $a=\frac{\sqrt{270}}{3}=\frac{3\sqrt{30}}{3}=\sqrt{30}$ باشد. تعیین اندازه‌ی ارتفاع:

$$AH=\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{30}=\frac{3}{2}\sqrt{10}$$



اولاً: باید فاصله‌ی $A(x,y)$ تا H برابر $\frac{3}{2}\sqrt{10}$ باشد:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=(\frac{3}{2}\sqrt{2})^2=\frac{45}{2}$$

ثانیاً: چون شیب خط داده شده ۳ است، باید شیب AH برابر $-\frac{1}{3}$ باشد:

$$\frac{y-1}{x-2}=-\frac{1}{3} \to x=5-3y$$

جایگذاری رابطه‌ی اخیر در معادله‌ی اول:

$$(5-3y-2)^2+(y-1)^2=\frac{45}{2} \to 9(y-1)^2+(y-1)^2=\frac{45}{2} \to (y-1)^2=\frac{45}{20}=\frac{9}{4}$$

$$\to y-1=\pm\frac{3}{2} \Rightarrow y=\frac{5}{2}\ ,\ y=-\frac{1}{2}$$

فقط گزینه‌ی دوم می‌تواند جواب باشد.

روش دوم: آزمون گزینه‌ها در دو شرط زیر:

$$AH=\frac{3}{2}\sqrt{10} \quad \text{و} \quad m_{AH}=-\frac{1}{3}$$

نکته ۱۰

فاصله‌ی نقطه‌ی (x_0,y_0) از خط به شکل استاندارد $ax+by+c=0$ برابر است با:

$$D=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

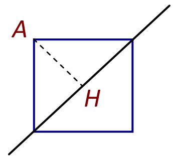
نتیجه:

فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط فوق برابر است با: $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

نقطه‌ی $A(۲,۳)$ رأس مربعی است که خط $۲x+y-۲=۰$ یک قطر آن می‌باشد. مساحت مربع کدام است؟

❶ ۲۵ ❷ $\frac{۵}{۲}$ ❸ ۱۰ ❹ ۲۰

گزینه ۳



با توجه به شکل، فاصله‌ی نقطه‌ی A از قطر مربع، نصف طول قطر را بدست می‌دهد:

$$AH=\frac{|۲(۲)+۳-۲|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\frac{|۵|}{\sqrt{۵}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$

پس قطر مربع $d=۲\sqrt{۵}$ است. بین طول ضلع و قطر مربع رابطه‌ی $d=a\sqrt{۲}$ برقرار است و در نتیجه طول ضلع مربع $a=\frac{d}{\sqrt{۲}}=\frac{۲\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}}$ بوده و مساحت مربع برابر است با:

$$S=a^۲=\left(\frac{۲\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}}\right)^۲=\frac{۴\times۵}{۲}=۱۰$$

توجه: مساحت مربع بر حسب قطر را می‌توانید مستقیماً از رابطه‌ی $S=\frac{d^۲}{۲}$ حساب کنید.

در مثلث با رأس‌های $A(۱,۵)$، $B(۷,۳)$ و $C(۲,-۲)$، اندازه‌ی ارتفاع AH برابر کدام است؟ (کنکور ۹۹)

❶ ۴ ❷ $۳\sqrt{۲}$ ❸ $۴\sqrt{۲}$ ❹ ۵

گزینه ۳

چون ارتفاع AH بر ضلع BC عمود است، پس:

اندازه‌ی ارتفاع AH برابر است با فاصله‌ی نقطه‌ی A تا خط BC

معادله‌ی BC را می‌نویسیم:

$$m_{BC}=\frac{-۲-۳}{۲-۷}=۱ \rightarrow y-۳=۱(x-۷) \Rightarrow x-y-۴=۰$$

در نتیجه:

$$AH=\frac{|۱-۵-۴|}{\sqrt{(۱)^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۸}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۸\sqrt{۲}}{۲}=۴\sqrt{۲}$$

سه ضلع یک مثلث به معادلات $AB:\ y+۲x=۷$، $AC:\ ۴y-۳x=۱۷$ و $BC:\ ۲y-۷x=-۱۹$ هستند. طول ارتفاع BH کدام است؟ (کنکور ۱٤۰۱)

❶ ۱ ❷ ۴/۴ ❸ ۲/۵ ❹ ۳

گزینه ۲

نقطه‌ی B از تقاطع AB و BC تعیین می‌شود:

$$\begin{cases} y+۲x=۷ \\ ۲y-۷x=-۱۹ \end{cases} \rightarrow x=۳,\ y=۱ \Rightarrow B(۳,۱)$$

پاسخ، فاصله‌ی B تا خط AC است:

$$BH=\frac{|۴(۱)-۳(۳)-۱۷|}{\sqrt{(۴)^۲+(-۳)^۲}}=\frac{|-۲۲|}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۲۲}{۵}=۴/۴$$

-----------◈-----------

دایره‌ی به مرکز $(۲,۱)$ بر دو خط $۳x+۴y=۵$ و $۱۲y-۵x=a$ مماس است. مقادیر ممکن برای a کدام اند؟

❶ ۱۱ و -۱۵ ❷ ۳ و ۱ ❸ -۱۱ و ۱۵ ❹ -۳ و -۱

گزینه ۳

فاصله‌ی مرکز تا دو خط $۳x+۴y-۵=۰$ و $-۵x+۱۲y-a=۰$ برابر شعاع بوده و لازم است برابر باشند:

$$\frac{|۳(۲)+۴(۱)-۵|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{|-۵(۲)+۱۲(۱)-a|}{\sqrt{(-۵)^۲+۱۲^۲}}\to\frac{۵}{۵}=\frac{|۲-a|}{۱۳}\to|۲-a|=۱۳$$

$$\to ۲-a=\pm۱۳\Rightarrow\begin{cases}a=۱۵\\a=-۱۱\end{cases}$$

-----------◈-----------

نقطه‌ی C قرینه‌ی $A(a,۴)$ نسبت به $B(۲,-۱)$ است و فاصله‌ی C از خط $x+۲y=۳$ برابر $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ است. مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

❶ ۲ ❷ -۲ ❸ -۲۲ ❹ -۱۰

گزینه ۳

مختصات C را طبق نکته‌ی گفته شده مشخص می‌کنیم:

$$C=(۲(۲)-a,۲(-۱)-۴)=(۴-a,-۶)$$

پس باید داشته باشیم:

$$\frac{|۴-a+۲(-۶)-۳|}{\sqrt{۱^۲+۲^۲}}=\frac{\sqrt{۵}}{۵}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\xrightarrow{\times\sqrt{۵}}\underbrace{|-a-۱۱|}_{=|a+۱۱|}=۱\to\begin{cases}a+۱۱=۱\Rightarrow a=-۱۰\\a+۱۱=-۱\Rightarrow a=-۱۲\end{cases}$$

جواب برابر $-۱۰-۱۲=-۲۲$ خواهد بود.

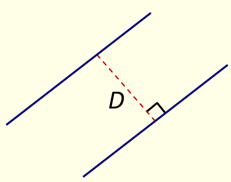
-----------◈-----------

نکته ۱۱

فاصله‌ی خطوط موازی:

فاصله‌ی دو خط موازی طبق یکی از روش‌های زیر بدست می‌آید:

- اگر معادله‌ی دو خط موازی را به صورت $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ تبدیل کنیم، فاصله‌ی آن‌ها عبارت است از: $D=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$.
- اگر دو خط موازی به صورت $y=mx+h$ و $y=mx+h'$ باشند، فاصله‌ی آن‌ها برابر است با: $D=\frac{|h-h'|}{\sqrt{۱+m^۲}}$.



0916 992 5753 farhad.shabani66

دو خط $۳x-۴y=۱$ و $۲by+x=۳b+۱$ موازی‌اند. مجذور فاصله‌ی دو خط کدام است؟

❶ $۰/۱۶$ ❷ $۰/۲۵$ ❸ $۰/۶۴$ ❹ $۱/۴۴$

گزینه ۳

شیب خط اول $\frac{۳}{۴}$ است و در نتیجه شیب خط دوم هم برابر همین عدد خواهد بود:

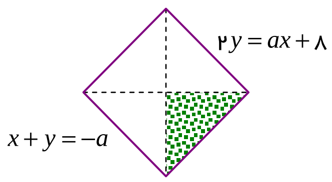
$$۲by+x=۳b+۱ \rightarrow ۲by=-x+۳b+۱ \xrightarrow{\div ۲b} y=-\frac{۱}{۲b}x+\frac{۳b+۱}{۲b}$$

$$\rightarrow -\frac{۱}{۲b}=\frac{۳}{۴} \Rightarrow b=-\frac{۴}{۶}=-\frac{۲}{۳}$$

خط دوم به صورت $۲(-\frac{۲}{۳})y+x=۳(-\frac{۲}{۳})+۱ \Rightarrow -\frac{۴}{۳}y+x=-۱$ و یا به صورت $-۴y+۳x+۳=۰$ نوشته می‌شود. چون معادله‌ی خط اول $-۴y+۳x-۱=۰$ است، بنابراین:

$$D=\frac{|۳-(-۱)|}{\sqrt{(-۴)^۲+۳^۲}}=\frac{۴}{۵}=۰/۸ \Rightarrow D^۲=(۰/۸)^۲=۰/۶۴$$

در مربع شکل روبرو، مساحت ناحیه‌ی سایه‌دار کدام است؟



❶ ۲ ❷ ۱ ❸ $\frac{۱}{۲}$ ❹ $\frac{۱}{۴}$

گزینه ۳

باید ضلع‌های روبرو موازی باشند، یعنی شیب‌ها برابرند:

$$\frac{a}{۲}=-۱ \Rightarrow a=-۲$$

خط‌ها را شبیه به هم می‌نویسیم:

$$۲y=ax+۸ \xrightarrow{a=-۲} -۲x-۲y+۸=۰ \quad و \quad x+y=-a \xrightarrow{\times(-۲)} -۲x-۲y+۴=۰$$

فاصله‌ی این دو خط برابر ضلع مربع بوده، از آن‌جا مساحت مربع و سپس یک چهارم آن جواب خواهد بود:

$$\frac{|۸-۴|}{\sqrt{(-۲)^۲+(-۲)^۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۸}} \Rightarrow \frac{۱}{۴}S=\frac{۱}{۴}\times(\frac{۴}{\sqrt{۸}})^۲=\frac{۱}{۲}$$

---

۴ معادله‌ی درجه دو

یادآوری:

نکته ۱۲

معادله درجه دوم پس از ساده شدن به شکل $ax^2+bx+c=0$ با شرط $(a\neq 0)$ است؛ اعداد a، b و c ضرایب معادله هستند و جواب‌ها بر حسب $\Delta=b^2-4ac$:

- اگر $\Delta>0$ باشد، معادله **دو ریشه‌ی مختلف** (متمایز) α و β دارد که عبارتند از:

$$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- اگر $\Delta=0$ باشد، معادله **دو ریشه‌ی مضاعف** (برابر) دارد که عبارتند از:

$$\alpha=\beta=-\frac{b}{2a}$$

- اگر $\Delta<0$ باشد، معادله **هیچ جوابی** ندارد.

حالت‌های ویژه:

در معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$، همواره به سه حالت زیر توجه داشته باشید:

- اگر a و c مختلف العلامه باشند، همیشه $\Delta>0$ است و معادله یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد.
- اگر $a+b+c=0$ باشد، آنگاه یکی از ریشه‌ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است. **(بسیار مهم)**
- اگر $b=a+c$ باشد، آنگاه یکی از ریشه‌ها -1 و دیگری $-\frac{c}{a}$ است. **(بسیار مهم)**

مثلاً:

در معادله‌ی $3x^2+4x+1=0$، شرط $b=a+c$ برقرار بوده و جواب‌ها فوری -1 و $-\frac{c}{a}=-\frac{1}{3}$ به‌دست می‌آیند.

کدام یک از عددهای زیر، یک ریشه‌ی معادله‌ی $x^2-(a-1)x+(a-2)=0$ است؟

❶ $a-1$ ❷ $1-a$ ❸ $2-a$ ❹ $a-2$

گزینه ۴

به مجموع ضرایب نگاه کنید: $1-a+1+a-2=0$

پس یکی از ریشه‌ها ۱ و دیگری برابر است با:

$$\frac{c}{a}=\frac{a-2}{1}=a-2$$

در ادامه، ارتباط بین جواب‌ها و ضرایب معادله‌ی درجه دوم بررسی می‌شود.

توجه کنید:

هر وقت در مورد ریشه‌های α و β از یک معادله‌ی درجه دوم صحبت می‌شود، باید از وجود جواب‌ها مطمئن باشید.

(در صورت لزوم باید شرط $\Delta \geq ۰$ را چک کنید.)

نکته ۱۳

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، آنگاه:

- **مجموع ریشه‌ها:** برابر است با: $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$
- **حاصل‌ضرب ریشه‌ها:** برابر است با: $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

گاهی فاصله یا اختلاف دو ریشه مورد نظر است که از تساوی $|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ به‌دست می‌آید.

نتایج ساده:

معادله وقتی دو جواب قرینه دارد که $s=-\dfrac{b}{a}=۰$، یعنی $b=۰$ باشد. همچنین شرط ریشه‌های وارون:

$$p=۱ \Rightarrow a=c$$

نمونه‌ی ساده:

اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $-۳x^۲+x+۲=۰$ باشند، مقدار $۳\alpha^۲\beta+۳\alpha\beta^۲$ را حساب می‌کنیم.

چون:

$$s=\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \Rightarrow s=-\frac{۱}{-۳}=\frac{۱}{۳} \quad \text{و} \quad p=\alpha\beta=\frac{c}{a} \Rightarrow p=\frac{۲}{-۳}=-\frac{۲}{۳}$$

است، در نتیجه:

$$۳\alpha^۲\beta+۳\alpha\beta^۲=۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=۳ps \Rightarrow ۳(-\frac{۲}{۳})(\frac{۱}{۳})=-\frac{۲}{۳}$$

اگر مجموع ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲+mx+n=۰$ برابر ۲ و حاصل‌ضرب آن‌ها $-\dfrac{۵}{۲}$ باشد، مقدار $m+n$ کدام است؟

❶ ۱ ❷ -۱ ❸ -۹ ❹ ۹

گزینه ۳

باید داشته باشیم:

$$-\frac{b}{a}=۲ \rightarrow -\frac{m}{۲}=۲ \Rightarrow m=-۴ \quad \text{و} \quad \frac{c}{a}=-\frac{۵}{۲} \rightarrow \frac{n}{۲}=-\frac{۵}{۲} \Rightarrow n=-۵$$

در نتیجه $m+n=-۹$ است.

معادله‌ی $x^2+(m^3-m)x+3m+1=0$ به ازای کدام مقدار m دو ریشه‌ی حقیقی قرینه دارد؟

1) -1 2) -1 و 0 و 1 3) 1 و 0 4) 0

گزینه ۱

باید جمع ریشه‌ها صفر باشد: $-\frac{b}{a}=0 \Rightarrow b=0$ پس:

$$m^3-m=0 \to m(m-1)(m+1)=0 \to m=0,1,-1$$

(به ازای $m=0$ و $m=1$ مقدار Δ منفی شده و در نتیجه فقط $m=-1$ قابل قبول است.)

به ازای کدام مقدار m در معادله‌ی $x^2-mx+8=0$ یکی از ریشه‌ها مربع دیگری است؟

1) 4 2) 8 3) 2 4) 6

گزینه ۴

شرط داده شده را به صورت $x''=(x')^2$ در نظر گرفته و فرمول ضرب ریشه‌ها را بکار می‌بریم:

$$x'x''=\frac{c}{a} \to x'(x')^2=8 \to (x')^3=8 \to x'=2$$

بنابراین یکی از ریشه‌های معادله 2 است و می‌توانیم آن را در معادله جایگزین x سازیم:

$$2^2-m\times 2+8=0 \to 2m=12 \Rightarrow m=6$$

به ازای کدام مقادیر m، معادله‌ی درجه دوم $(m-6)x^2-2mx-3=0$، دو ریشه‌ی حقیقی منفی دارد؟ (کنکور ۹۷)

1) $m<-6$ 2) $m<3$ 3) $0<m<3$ 4) $3<m<6$

گزینه ۴

روش عادی، اشتراک گرفتن از جواب‌های سه شرط زیر است:

$-\frac{b}{a}<0$ (دو ریشه منفی) و $\frac{c}{a}>0$ (دو ریشه هم‌علامت) و $\Delta\ge 0$ (دو ریشه موجود است.)

روش سریع:

با توجه به گزینه‌ها، روش عدد گذاری قابل استفاده است:

$m=1: -5x^2-2x-3=0 \to 5x^2+2x+3=0 \xrightarrow{\Delta<0}$ رد گزینه ۲ و ۳

$m=5: -x^2-10x-3=0 \to x^2+10x+3=0 \xrightarrow{\Delta>0,\ \frac{c}{a}>0,\ -\frac{b}{a}<0}$ رد گزینه ۱

---

x_1 و x_2 جواب‌های معادله‌ی $(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1)(\sqrt[3]{x^2}-1)=2\sqrt[3]{x}$ باشند. مقدار x_1+x_2 کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۰)

1) -1 2) صفر 3) 1 4) 2

گزینه ۴

0916 992 5753
farhad.shabani66

معادله را بر حسب $\sqrt[3]{x}=t$ می‌نویسیم:

$$(t^2+\frac{1}{t^2}+1)(t^2-1)=2t \xrightarrow{\times t^2} \underbrace{(t^4+t^2+1)(t^2-1)}_{=(t^2)^3-1^3=t^6-1}=2t^3 \rightarrow t^6-2t^3-1=0$$

این معادله در واقع $x^2-2x-1=0$ است و جمع جواب‌ها:

$$-\frac{b}{a}=-\frac{-2}{1}=2$$

نکته ۱۴

با داشتن عددهای $\alpha+\beta=s$ و $\alpha\beta=p$:

بعضی عبارت‌های خاص بر حسب s و p به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

- **جمع مجذورات:** $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=s^2-2p$
- **جمع معکوس‌ها:** $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{s}{p}$
- **جمع معکوس مجذورات:** $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{s^2-2p}{p^2}$
- **جمع مکعب ریشه‌ها:**

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=s^3-3ps$$

به ازای کدام مقدار m مجموع مجذورات دو ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی $2x^2-mx+m-1=0$ برابر ۴ است؟

❶ -6 ❷ -2 ❸ 2 ❹ 6

گزینه ۲

باید شرط $\alpha^2+\beta^2=s^2-2p=4$ برقرار باشد. طبق نکته‌ی قبل و این که $s=-\frac{b}{a}=-\frac{-m}{2}=\frac{m}{2}$ و $p=\frac{c}{a}=\frac{m-1}{2}$ است، باید داشته باشیم:

$$(\frac{m}{2})^2-2(\frac{m-1}{2})=4 \rightarrow \frac{m^2}{4}-m+1=4 \xrightarrow{\times 4} m^2-4m-12=0 \Rightarrow m=-2\ ,\ m=6$$

برای $m=6$ مقدار دلتا منفی می‌شود.

اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی $x^2-4x+1=0$ باشند، حاصل $|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|$ کدام است؟

❶ $\sqrt{2}$ ❷ $\sqrt{3}$ ❸ 2 ❹ 3

گزینه ۱

توان دوم عبارت $|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|$ را با توجه به خاصیت $|a|^2=a^2$ تعیین کرده و در پایان از آن جذر می‌گیریم:

0916 992 5753
farhad.shabani66

$$|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|^۲=(\sqrt{x'}-\sqrt{x''})^۲=x'+x''-۲\sqrt{x'x''}=-\frac{b}{a}-۲\sqrt{\frac{c}{a}}=۴-۲\sqrt{۱}=۲$$

در نتیجه $|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|=\sqrt{۲}$ است.

α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲+۶x+a=۰$ هستند. اگر $\alpha<\beta<۰$ و $۳\alpha^۲+۲\beta^۲=۱۲\sqrt{۲}+۸۵$ باشد، مقدار a چقدر است؟ (ریاضی ۱۴۰۱)

❶ $\frac{۱۳}{۴}$ ❷ $\frac{۲۱}{۵}$ ❸ ۱ ❹ ۲

گزینه ۳

با توجه به این که $\alpha+\beta=-۶$ و $\alpha\beta=a$ است:

$$\alpha^۲+\beta^۲=s^۲-۲p=۳۶-۲a \quad \text{و} \quad |\underbrace{\alpha-\beta}_{<۰}|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|۱|}\rightarrow \alpha-\beta=-\sqrt{\Delta}=-\sqrt{۳۶-۴a}=-۲\sqrt{۹-a}$$

بنابراین:

$$۳\alpha^۲+۲\beta^۲=\frac{۵}{۲}(\alpha^۲+\beta^۲)+\frac{۱}{۲}\underbrace{(\alpha^۲-\beta^۲)}_{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}=\frac{۵}{۲}(۳۶-۲a)+\frac{۱}{۲}(-۶)(-۲\sqrt{۹-a})$$

$$=۹۰-۵a+۶\sqrt{۹-a}\rightarrow ۹۰-۵a+۶\sqrt{۹-a}=۱۲\sqrt{۲}+۸۵\rightarrow ۵+۶\sqrt{۹-a}=۵a+۱۲\sqrt{۲}$$

واضح است که تساوی به ازای $a=۱$ برقرار است.

نکته ۱۵

اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، بدیهی است که ریشه‌ها در معادله صدق می‌کنند:

$$ax'^۲+bx'+c=۰ \quad \text{و} \quad ax''^۲+bx''+c=۰$$

در معادله‌ی درجه دوم $x^۲-۳x+۱=۰$ حاصل $\sqrt{x'^۲(۳x''-۱)}$ چقدر است؟

❶ $\sqrt{۲}$ ❷ $\sqrt{۳}$ ❸ ۲ ❹ ۱

گزینه ۴

طبق نکته‌ی قبل $x''^۲-۳x''+۱=۰$ و در نتیجه تساوی $x''^۲=۳x''-۱$ برقرار است. بنابراین:

$$\sqrt{x'^۲(۳x''-۱)}=\sqrt{x'^۲x''^۲}=|x'x''|=|\frac{c}{a}|=|۱|=۱$$

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۲x-۶=۰$ باشند، حاصل عبارت $(\alpha^۲-۶)^۳+۸\beta^۳$ کدام است؟

0916 992 5753
farhad.shabani66