به نام خدا

کتاب تشریحی ریاضی

ریاضی یازدهم تجربی

مولف :

فرهاد شعبانی

انتشارات ارسطو

(سازمان چاپ و نشر ایران - ۱۴۰۲)

نسخه الکترونیکی این اثر در سایت سازمان چاپ و نشر ایران و اپلیکیشن کتاب رسان موجود می باشد

chaponashr.ir

سرشناسه : شعبانی، فرهاد، ۱۳۶۶
عنوان و نام پدیدآور :کتاب تشریحی ریاضی (ریاضی یازدهم تجربی)/ مولف فرهاد شعبانی.
مشخصات نشر : ارسطو (سامانه اطلاع رسانی چاپ و نشر ایران)، ۱۴۰۲.
مشخصات ظاهری : ۲۵۶ ص.
شابک : ۹-۱۵۶-۳۳۹-۶۲۲-۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی : فیپا
موضوع : آموزش ریاضی
رده بندی کنگره : HD۶۲/۳
رده بندی دیویی : ۶۵۸/۱۳
شماره کتابشناسی ملی : ۹۱۸۱۸۲۳
اطلاعات رکورد کتابشناسی : فیپا

نام کتاب : کتاب تشریحی ریاضی (ریاضی یازدهم تجربی)
مولف : فرهاد شعبانی
ناشر : ارسطو (سامانه اطلاع رسانی چاپ و نشر ایران)
صفحه آرایی، تنظیم و طرح جلد: پروانه مهاجر
تیراژ : ۱۰۰۰ جلد
نوبت چاپ : اول – ۱۴۰۲
چاپ : زبرجد
قیمت : ۱۶۵۰۰۰ تومان
فروش نسخه الکترونیکی – کتاب‌رسان :
https://chaponashr.ir/ketabresan
شابک : ۹-۱۵۶-۳۳۹-۶۲۲-۹۷۸
تلفن مرکز پخش : ۰۹۱۲۰۲۳۹۲۵۵
www. chaponashr. ir

انتشارات ارسطو

آموزش تشریحی

ریاضی یازدهم

تجربی

ریاضی

یازدهم تجربی

۱

هندسه تحلیلی و جبر

بخش ۱
هندسه تحلیلی

یادآوری:

معادله‌ی هر خط بر حسب x و y از درجه‌ی ۱ است، مانند:

$$۲x+y=-۳ \qquad \text{یا} \qquad x+۲=۱ \qquad \text{یا} \qquad ۲y=-۳$$

یک کار معمول در مورد هر خط نمایش هندسی آن است:

رسم خط:

چون از هر دو نقطه فقط یک خط می‌گذرد:

با تعیین مختصات دو نقطه از هر خط، آن خط رسم می‌شود.

مثال: خط به معادله‌ی $y=-۲x+۳$ را رسم کنید.

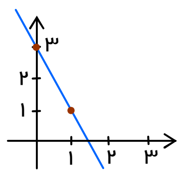
پاسخ

جای x دو عدد دلخواه قرار داده و y را مشخص می‌کنیم تا مختصات دو نقطه معلوم شود:

$$x=۰: \quad y=-۲(۰)+۳=۳$$
$$x=۱: \quad y=-۲(۱)+۳=۱$$

⇨

x	۰	۱
y	۳	۱



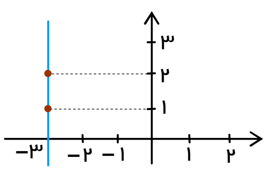
مثال: خط‌های $x=-۳$ و $۲y-۴=۰$ را رسم کنید.

پاسخ

در معادله‌ی $x=-۳$ حرف y وجود ندارد، یعنی:

مقدار x فقط می‌تواند -۳ باشد، ولی مقدار y هر عدد دلخواهی است.

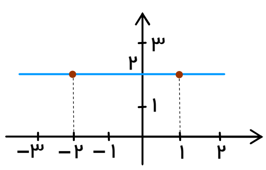
برای مثال، نقاط $(-۳,۱)$ و $(-۳,۲)$ روی خط قرار داشته و خط رسم می‌شود:



به صورت مشابه، در معادله‌ی $۲y-۴=۰$ داریم:

$$۲y-۴=۰ \rightarrow ۲y=۴ \Rightarrow y=\frac{۴}{۲}=۲$$

در معادله‌ی $y=۲$ مقدار x هر عددی می‌تواند باشد، ولی y فقط ۲ است:



(نقاط $(-۲,۲)$ و $(۱,۲)$ روی خط هستند.)

شیب خط:

وقتی دو نقطه از یک خط را داشته باشیم:

نسبت (یعنی: تقسیم) تغییر عرض‌ها به تغییر طول‌ها را شیب آن خط می‌گویند.

یعنی:

اگر دو نقطه‌ی $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$ از خط داده شوند، شیب خط چنین بدست می‌آید:

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱} \qquad (x_۱\neq x_۲)$$

مثال: خطی از دو نقطه‌ی $(۲,-۱)$ و $(۰,۲)$ عبور کرده است. شیب آن را حساب کنید.

پاسخ

طبق فرمول شیب خط:

$$(\underbrace{۲}_{x_۱},\underbrace{-۱}_{y_۱}) \ , \ (\underbrace{۰}_{x_۲},\underbrace{۲}_{y_۲}) \Rightarrow m=\frac{۲-(-۱)}{۰-۲}=\frac{۳}{-۲} \Rightarrow m=-\frac{۳}{۲}$$

مثال: خطی محورهای مختصات را در طول ۲ و عرض -۳ قطع کرده است. شیب آن را بیابید.

پاسخ

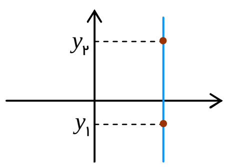
نقطه‌ی به طول ۲ روی محور طول‌ها یعنی $(۲,۰)$ و نقطه‌ی با عرض -۳ روی محور عرض یعنی $(۰,-۳)$. پس شیب چنین است:

$$m=\frac{۰-(-۳)}{۲-۰}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow m=\frac{۳}{۲}$$

توجه کنید:

موارد زیر مهم هستند:

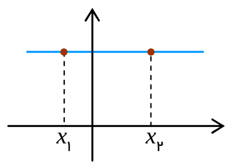
- اگر طول دو نقطه برابر باشد، یعنی: $x_۱=x_۲$، مقدار $m=\frac{y_۲-y_۱}{۰}$ تعریف نشده است. این حالت فقط در مورد خط‌های عمودی اتفاق می‌افتد:



پس:

در مورد خط‌های عمودی، شیب تعریف نشده است.

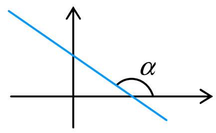
- اگر عرض‌ها برابر باشند: $y_۱ = y_۲$، آنگاه مقدار $m = \frac{۰}{x_۲ - x_۱} = ۰$ است. این حالت فقط در مورد خط‌هـای افقـی اتفـاق می‌افتد:



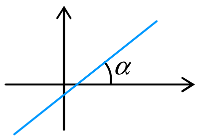
پس:

شیب هر خط افقی برابر صفر است.

- شیب خط، دقیقاً تانژانت زاویه‌ی بین خط با جهت مثبت محور طول است:



شیب منفی $m = \tan\alpha$



شیب مثبت $m = \tan\alpha$

نتیجه:

برای آن‌که دو خط موازی باشند، باید شیب‌های آن‌ها برابر باشد.

مثال: خط l به معادله‌ی $l: ۳x - y = ۱$ بوده و خط l' با آن موازی است. شیب l' را تعیین کنید.

پاسخ

شیب خط l را توسط انتخاب دو نقطه روی آن مشخص می‌کنیم:

$$۳x - y = ۱ \rightarrow y = ۳x - ۱ \left\langle \begin{array}{l} x = ۰ \rightarrow y = ۳(۰) - ۱ = -۱ \rightarrow (۰, -۱) \\ x = ۱ \rightarrow y = ۳(۱) - ۱ = ۲ \rightarrow (۱, ۲) \end{array} \right. \Rightarrow m = \frac{۲ - (-۱)}{۱ - ۰} = ۳$$

چون $m_l = ۳$ است، پس شیب خط موازی آن l' هم برابر ۳ خواهد بود.

نوشتن معادله:

برای نوشتن معادله‌ی هر خط، به دو مورد نیاز داریم:

شیب: m و **مختصات یک نقطه روی آن:** $(x_۰, y_۰)$

با این اطلاعات؛

معادله‌ی خط چنین نوشته خواهد شد:

$$y - y_۰ = m(x - x_۰)$$

زیرا:

اگر (x,y) نقطه‌ی دلخواهی از خط باشد، طبق تعریف شیب خط باید:

$$m=\frac{y-y_{\circ}}{x-x_{\circ}} \Rightarrow y-y_{\circ}=m(x-x_{\circ})$$

مثال: معادله‌ی خط گذرا بر دو نقطه‌ی $(۲,-۱)$ و $(\circ,۲)$ را بنویسید.

پاسخ

شیب خط را مشخص می‌کنیم:

$$m=\frac{۲-(-۱)}{\circ-۲}=\frac{۳}{-۲} \Rightarrow m=-\frac{۳}{۲}$$

توسط مختصات یکی از نقاط، معادله نوشته می‌شود:

$$(\underbrace{\circ}_{x_{\circ}},\underbrace{۲}_{y_{\circ}}),\ m=-\frac{۳}{۲} \Rightarrow y-۲=-\frac{۳}{۲}(x-\circ)$$

$$\xrightarrow{\times ۲} ۲y-۴=-۳x \Rightarrow ۲y+۳x=۴$$

-----------✧-----------

مثال: معادله‌ی خطی بنویسید که از نقطه‌ی $(-۳,۱)$ گذشته و محور افقی را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند.

پاسخ

نقطه‌ی روی محور افقی $(۲,\circ)$ است. مانند قبل: $m=\frac{\circ-۱}{۲-(-۳)}=-\frac{۱}{۵}$ است و در نتیجه:

$$y-\circ=-\frac{۱}{۵}(x-۲) \xrightarrow{\times ۵} ۵y=-x+۲ \Rightarrow x+۵y=۲$$

-----------✧-----------

مثال: معادله‌ی خط گذرا بر دو نقطه‌ی $(۲,-۱)$ و $(۲,\circ)$ را بنویسید.

پاسخ

توجه کنید:

طول‌های دو نقطه برابر است، یعنی خط عمودی بوده و شیب آن تعریف نشده است. اکنون:

چون خط عمودی است و باید از نقطه‌ای به طول ۲ عبور کند، معادله‌اش $x=۲$ است.

-----------✧-----------

مثال: معادله‌ی خطی بنویسید که با خط $l:\ ۳x-y=۱$ موازی بوده و از مبدأ عبور کند.

پاسخ

در مثالی قبل‌تر دیدیم که شیب خط l برابر ۳ است و در نتیجه:

خط مورد نظر نیز دارای شیب ۳ بوده و باید از نقطه‌ی $(\circ,\circ)$ عبور کند.

پس معادله‌ی آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y-\circ=۳(x-\circ) \Rightarrow y=۳x$$

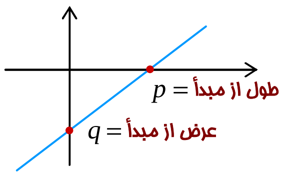
-----------✧-----------

برخورد خط با محورها:

دو عدد مهم در مورد خط‌ها را بیان می‌کنیم:

- **عرض از مبدأ:**
  این عدد عرض نقطه‌ای است که خط در آن محور y را قطع کرده.
- **طول از مبدأ:**
  این عدد طول نقطه‌ای است که خط در آن محور x را قطع کرده.

هر دو مقدار در شکل دیده می‌شوند:



روش محاسبه:

در معادله قرار می‌دهیم: $y=0$ $\Leftarrow$ جوابِ x، طول از مبدأ خط است.

در معادله قرار می‌دهیم: $x=0$ $\Leftarrow$ جوابِ y، عرض از مبدأ خط است.

مثال: عرض از مبدأ و طول از مبدأ خط $l: \ -5x+2y=4$ را مشخص کنید.

پاسخ

طبق روش بالا:

$x=0: \quad -5(0)+2y=4 \ \to \ 2y=4 \ \Rightarrow \ y=2$ عرض از مبدأ

$y=0: \quad -5x+2(0)=4 \ \to \ -5x=4 \ \Rightarrow \ x=-\frac{4}{5}$ طول از مبدأ

مثال: معادله‌ی خط با عرض از مبدأ ۲ و طول از مبدأ -1 را بنویسید.

پاسخ

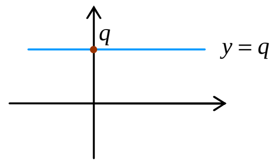
طبق اطلاعات داده شده، خط از نقاط $(0,2)$ و $(-1,0)$ گذشته است. پس: $m=\frac{0-2}{-1-0}=2$ بوده و معادله:

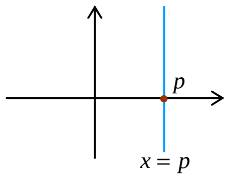
$$y-0=2(x-(-1)) \ \Rightarrow \ y=2x+2$$

0916 992 5753
farhad.shabani66

توجه کنید:

خط افقی طول از مبدأ نداشته و همچنین خط عمودی عرض از مبدأ ندارد.





تعیین شیب:

اگر شیب خط m و عرض از مبدأ خط، عدد q را داشته باشیم، معادله‌ی خط یکباره نوشته می‌شود:

$$y = mx + q \qquad \text{(چرا؟)}$$

نتیجه:

اگر معادله‌ی خط را به صورت منظم بنویسیم، یعنی:

y با ضریب $+1$ در یک سمت و بقیه‌ی عبارات در سمت دیگر معادله باشند؛

در این صورت:

همیشه «ضریب x برابر شیب خط» و «عدد ثابت برابر عرض از مبدأ» خواهد شد.

مثال: شیب و عرض از مبدأ خط $3x - 6y = 1$ را بیابید.

پاسخ

باید y را در سمت چپ تنها کرده و ضریب آن به $+1$ تبدیل گردد:

$$3x - 6y = 1 \to -6y = -3x + 1 \xrightarrow{\div(-6)} y = \frac{-3}{-6}x + \frac{1}{-6}$$

معادله به صورت $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}$ ساده می‌شود و بنابراین؛ $m = \frac{1}{2}$ شیب خط و $q = -\frac{1}{6}$ عرض از مبدأ خط است.

-----------✧-----------

مثال: معادله‌ی خطی موازی خط $l: \ -2x - y = 3$ و دارای عرض از مبدأ -5 را بنویسید.

پاسخ

شیب خط l را مشخص می‌کنیم:

$$-2x - y = 3 \to -y = 2x + 3 \xrightarrow{\div(-1)} y = -2x - 3$$

شیب این خط و در نتیجه شیب خط مورد نظر $m = -2$ بوده و با داشتن $q = -5$ معادله‌ی آن نوشته می‌شود:

$$y = -2x - 5$$

-----------✧-----------

مثال: خطی گذرا از نقطه‌ی $(-1,2)$ و موازی خط $l: \ 3x - y = 1$، محور x را با کدام طول قطع می‌کند؟

پاسخ

شیب خط l برابر $+۳$ است و در نتیجه خط مورد نظر هم شیب $+۳$ دارد. معادله‌ی آن:

$$y-۲=۳(x-(-۱)) \Rightarrow y=۳x+۵$$

در نقطه‌ی تقاطع خط با محور طول، باید $y=۰$ باشد:

$$y=۰:\ ۰=۳x+۵ \to ۳x=-۵ \Rightarrow x=-\frac{۵}{۳}$$

-----------✧-----------

خط‌های عمود بر هم:

شرط آن که دو خط با شیب‌های m و m' بر هم عمود باشند، آن است که:

$$m\times m'=-۱ \Rightarrow m'=-\frac{۱}{m}$$

بنابراین:

وقتی m را داریم، کافی است آن را معکوس و سپس قرینه کرده تا شیب خط عمود: m' حاصل شود.

مثال: (از کتاب) خط l معادله‌ی $۲y-۳x=۱$ و خط d با عرض از مبدأ ۵ به معادله‌ی $y=mx+۵$ را در نظر بگیرید.

الف) m را طوری بیابید که خط d با خط l موازی باشد.

ب) به ازای چه مقداری از m، دو خط بر یکدیگر عمود هستند؟

پاسخ

الف) چون $m_l=\frac{۳}{۲}$ و $m_d=m$ است، باید $m=\frac{۳}{۲}$ باشد.

ب) طبق شرط عمود بودن خط‌ها:

$$m_l\times m_d=-۱ \to \frac{۳}{۲}\times m=-۱ \Rightarrow m=-\frac{۲}{۳}$$

-----------✧-----------

مثال: خطی گذرنده از نقطه‌ی $(۱,-۲)$ و عمود بر خط $۲y+x=۱$، محور y را با کدام عرض قطع می‌کند؟

پاسخ

شیب خط داده شده برابر $m=-\frac{۱}{۲}$ بدست می‌آید و در نتیجه شیب خط عمود بر آن چنین محاسبه می‌شود:

$$-\frac{۱}{۲}\times m'=-۱ \to m'=\frac{-۱}{-\frac{۱}{۲}}=۲ \to m'=۲$$

پس معادله‌ی آن خط با استفاده از نقطه‌ی داده شده نوشته می‌شود:

$$y-(-2)=2(x-1) \;\rightarrow\; y+2=2x-2 \;\Rightarrow\; y=2x-4$$

در نقطه‌ی تقاطع این خط با محور عرض، باید $x=0$ باشد:

$$x=0: \;\; y=2(0)-4 \;\Rightarrow\; y=-4$$

مثال: مربع $ABCD$ با دو رأس مجاور $A(5,1)$ و $B(10,4)$ داده شده است.

الف) معادله‌ی ضلع AB را بنویسید.

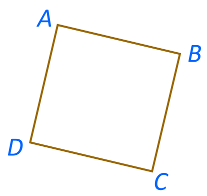
ب) با استفاده از قسمت قبل، معادله‌ی ضلع AD را بنویسید.

پاسخ

الف) معادله‌ی ضلع توسط شیب و نقطه‌ی A نوشته می‌شود:

$$\left.\begin{array}{l} m_{AB}=\dfrac{4-1}{10-5}=\dfrac{3}{5} \\ (\underbrace{5}_{x_0},\underbrace{1}_{y_0}) \end{array}\right\} \Rightarrow \; y-1=\frac{3}{5}(x-5) \xrightarrow{\times 5} 5y-5=3x-15 \;\Rightarrow\; -3x+5y=-10$$

ب) چون AD بر ضلع AB عمود است، شیب آن با معکوس و قرینه کردن $m_{AB}=\frac{3}{5}$ حاصل می‌شود:



$$m_{AB}=\frac{3}{5} \;\Rightarrow\; m_{AD}=-\frac{5}{3}$$

معادله‌ی ضلع AD:

$$y-1=-\frac{5}{3}(x-5) \xrightarrow{\times 3} 3y-3=-5x+25 \;\Rightarrow\; 5x+3y=28$$

توجه کنید:

می‌توان نشان داد، اگر دو خط به صورت استاندارد $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ داده شوند، آنگاه آن‌ها:

- موازی‌اند، هرگاه: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ و در غیر این صورت خطها متقاطع‌اند.
- بر هم منطبق‌اند، هرگاه: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$.
- بر هم عمودند، هرگاه: $aa'+bb'=0$.

فاصله‌ی دو نقطه:

اگر نقاط $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ داده شوند، فاصله‌ی آن‌ها برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

(دلیل این مطلب، با رسم شکل و استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس به آسانی بیان می‌شود.)

بویژه:

- اگر دو نقطه طول برابر داشته باشند، یعنی $x_1 = x_2$، آنگاه:

$$AB = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|$$

- اگر دو نقطه عرض برابر داشته باشند، یعنی $y_1 = y_2$، آنگاه:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$$

- فاصله‌ی نقطه‌ی A تا مبدأ ساده‌تر قابل بیان است:

$$OA = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

مثال: نقاط $A(2,-1)$ و $B(3,2)$ داده شده‌اند.

الف) طول پاره‌خط AB را حساب کنید.

ب) فاصله‌ی نقطه‌ی A تا مبدأ را بیابید.

پاسخ

الف) با استفاده از روش بالا:

$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

ب) طبق مطلب قبل:

$$OA = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

مثال: مثلث ABC با رأس‌های $A(1,2)$، $B(2,-1)$ و $C(-1,-1)$ داده شده است.

الف) آیا مثلث ضلع‌های برابر دارد؟ ب) آیا مثلث قائم‌الزاویه است؟

پاسخ

الف) طول سه ضلع را تعیین می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$
$$AC = \sqrt{(-1-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$
$$BC = \sqrt{(-1-2)^2 + (-1+1)^2} = \sqrt{9+0} = 3$$

پس: ضلع‌ها نابرابرند.

ب) اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، ضلع بزرگ‌تر وتر است و رابطه‌ی فیثاغورس برقرار خواهد بود:

$$(\sqrt{13})^2 = 13 \quad \text{و} \quad (\sqrt{10})^2 + (3)^2 = 10 + 9 = 19$$

چون $19 \neq 13$، در نتیجه مثلث قائم‌الزاویه هم نیست.

مثال: (از کتاب) مثلث ABC با رأس‌های $A(۲,۰)$، $B(۵,۴)$ و $C(-۲,۳)$ داده شـده اسـت. بـه دو روش نـشان دهیـد مثلث قائم الزاویه است و سپس مساحت آن را بیابید.

پاسخ

محاسبه‌ی طول اضلاع مانند قبل:

$$AB=\sqrt{(۵-۲)^۲+(۴-۰)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$
$$BC=\sqrt{(-۲-۵)^۲+(۳-۴)^۲}=\sqrt{۴۹+۱}=\sqrt{۵۰}$$
$$AC=\sqrt{(-۲-۲)^۲+(۳-۰)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

روش اول: چون رابطه‌ی فیثاغورس برقرار است:

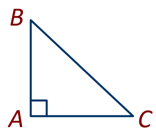
$$BC^۲=۵۰\ ,\ AB^۲+AC^۲=۲۵+۲۵=۵۰$$

روش دوم: توسط شیب‌ها نشان می‌دهیم ضلع‌های AB و AC بر هم عمود هستند:

$$m_{AB}=\frac{۴-۰}{۵-۲}=\frac{۴}{۳}\ ,\ m_{AC}=\frac{۳-۰}{-۲-۲}=-\frac{۳}{۴}$$ (شیب‌ها قرینه و معکوس هستند.)

برای تعیین مساحت، AB و AC را به عنوان ارتفاع و قاعده بکار می‌بریم:

$$S=\frac{۵\times ۵}{۲}=\frac{۲۵}{۲}$$

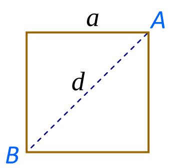


مثال: اگر $A(۴,۴)$ و $B(۱,۱)$ دو رأس متقابل (روبروی) یک مربع باشند، مساحت مربع را حساب کنید.

پاسخ

فاصله‌ی دو رأس متقابل، همان طول قطر مربع است:

$$d=\sqrt{(۴-۱)^۲+(۴-۱)^۲}=\sqrt{۹+۹}=\sqrt{۱۸}$$



توجه کنید:

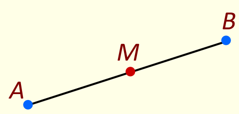
بین قطر d و ضلع a در مربع، همیشه رابطه‌ی $d=a\sqrt{۲}$ وجود دارد و در نتیجه:

$$a=\frac{d}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۱۸}}{\sqrt{۲}}\Rightarrow S=a^۲=\frac{۱۸}{۲}=۹$$

وسط پاره‌خط:

اگر نقاط $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ داده شوند، مختصات نقطه‌ی وسط آن‌ها M چنین است:

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_۱+x_۲}{۲} \\ y_M=\dfrac{y_۱+y_۲}{۲} \end{cases}\Rightarrow M(x_M,y_M)$$



مثال: نقاط $A(3m-1,2m-5)$ و $B(3-m,1-4m)$ مفروض‌اند. اگر نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB روی محور xها واقع باشد، مقدار m را بیابید.

پاسخ

باید عرض نقطه‌ی M برابر صفر باشد تا روی محور x قرار گیرد. بنابراین:

$$y_M=0 \;\rightarrow\; \frac{2m-5+1-4m}{2}=0 \;\rightarrow\; \frac{-2m-4}{2}=0$$
$$\rightarrow\; -2m-4=0 \;\Rightarrow\; m=-2$$

مثال: در مثلث با رئوس $A(0,3)$ ، $B(-3,1)$ و $C(3,1)$، فاصله‌ی نقطه‌ی A از وسط ضلع BC (یعنی طول میانه‌ی AM) را حساب کنید.

پاسخ

مختصات وسط ضلع BC چنین است:

$$M:\begin{cases} x_M=\dfrac{x_B+x_C}{2}=\dfrac{-3+3}{2}=0 \\ y_M=\dfrac{y_B+y_C}{2}=\dfrac{1+1}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow M(0,1)$$

اکنون طول میانه حساب می‌شود:

$$AM=\sqrt{(0-0)^2+(1-3)^2}=\sqrt{4}=2$$

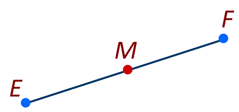
در دو مثال بعد، خاصیت‌هایی از نقاط در صفحه آورده می‌شود.

مثال: الف) قرینه‌ی نقطه‌ی $E(1,2)$ را نسبت به نقطه‌ی $M(-1,4)$ مشخص کنید.

ب) قرینه‌ی نقطه‌ی $P(\alpha,\beta)$ را نسبت به مبدأ مختصات به‌دست آورید.

پاسخ

الف) اگر $F(a,b)$ قرینه‌ی E باشد، باید M نقطه‌ی وسط E و F باشد:



$$x_M=\frac{x_E+x_F}{2} \rightarrow -1=\frac{1+a}{2} \Rightarrow a=-3 \quad و \quad y_M=\frac{y_E+y_F}{2} \rightarrow 4=\frac{2+b}{2} \Rightarrow b=6$$

در نتیجه $F(-3,6)$ است.

ب) اگر قرینه را $Q(r,s)$ بگیرید، به صورت مشابه، باید $O(0,0)$ نقطه‌ی وسط P و Q باشد:

$$0=\frac{\alpha+r}{2} \rightarrow \alpha+r=0 \Rightarrow r=-\alpha \quad و \quad 0=\frac{\beta+s}{2} \rightarrow \beta+s=0 \Rightarrow s=-\beta$$

نتیجه:

قرینه‌ی نقطه‌ی $P(\alpha,\beta)$ نسبت به مبدأ به صورت $Q(-\alpha,-\beta)$ تعیین می‌شود.

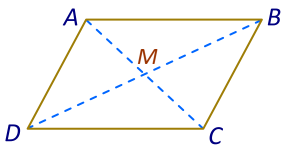
مثال: چهارضلعی $ABCD$ را یک متوازی الاضلاع در نظر گرفته و روابط بین طول و عرض رأس‌های آن به صورت زیر را نشان دهید:

$$x_A+x_C=x_B+x_D \quad \text{و} \quad y_A+y_C=y_B+y_D$$

در نتیجه:

اگر فقط مختصات سه رأس معلوم باشد، رأس چهارم را می‌توان مشخص کرد.

پاسخ



از این خاصیت استفاده می‌کنیم:

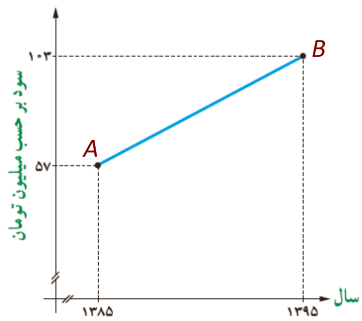
در متوازی الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

پس نقطه‌ی M وسط هر دو قطر AC و BD بوده و بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} x_M=\dfrac{x_A+x_C}{۲} \\ x_M=\dfrac{x_B+x_D}{۲} \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x_A+x_C}{۲}=\dfrac{x_B+x_D}{۲} \xrightarrow{\times ۲} x_A+x_C=x_B+x_D$$

به روش مشابه، عرض نقاط هم خاصیت گفته شده را دارد.

مثال: (از کتاب) سود سالانه‌ی یک کارگاه کوچک تولیدی از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۵ طبق نمودار روبرو سیر صعودی داشته است.



الف) میانگین سود سالانه‌ی کارگاه در این دهه چقدر بوده است؟

ب) در کدام سال، مقدار سود سالانه با این میانگین سود ده ساله برابر بوده است؟

پ) اگر سود سالانه در طول یک دهه‌ی آینده با همین روند افزایش یابد، انتظار می‌رود در سال ۱۴۰۵ سود سالانه چقدر باشد؟

پاسخ

الف) واضح است که میانگین: $\dfrac{۵۷+۱۰۳}{۲}=\dfrac{۱۶۰}{۲}=۸۰$ میلیون تومان است.

ب) چون سیر صعودی سود کارگاه خطی است، میانگین سود در نقطه‌ی وسط اتفاق می‌افتد:

$$\dfrac{۱۳۸۵+۱۳۹۵}{۲}=۱۳۹۰ \qquad \text{(سال ۱۳۹۰)}$$

پ) اگر روند همین گونه باشد، جواب مورد نظر، قرینه‌ی A نسبت به B است. اگر سود سالانه در آن سال را m بگیریم:

$$\dfrac{۵۷+m}{۲}=۱۰۳ \Rightarrow m=۲\times۱۰۳-۵۷=۱۴۹ \qquad \text{(میلیون تومان)}$$

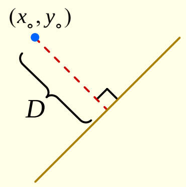
منظور از فاصله‌ی نقطه تا یک خط، کوتاه‌ترین فاصله‌ی بین آن نقطه تا تمام نقاط روی خط است. این فاصله برابر طول پاره‌خط عمود رسم شده از نقطه تا خط بوده و چنین محاسبه می‌شود:

فاصله‌ی نقطه تا خط:

باید ابتدا خط را به صورت مرتب $ax+by+c=0$ نوشت. سپس:

فاصله‌ی یک نقطه‌ی (x_0,y_0) از این خط برابر است با:

$$D=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



بویژه:

فاصله‌ی مبدأ مختصات: $(0,0)$ تا این خط برابر است با:

$$\boxed{\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

مثال: دو خط $l_1: 2x+y=-1$ و $l_2: -x+2y=-7$ داده شده‌اند.

الف) نقطه‌ی برخورد دو خط را مشخص کنید.

ب) فاصله‌ی نقطه‌ی $C(7,9)$ از خط l_2 را بدست آورید.

پاسخ

الف) نقطه‌ی برخورد دو خط از حل دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$\left.\begin{matrix}2x+y=-1\\-x+2y=-7\end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix}2x+y=-1\\-2x+4y=-14\end{matrix}\right\} \rightarrow 5y=-15 \Rightarrow y=-3$$

جایگذاری -3 در یکی از معادلات به جای y:

$$2x-3=-1 \Rightarrow x=1$$

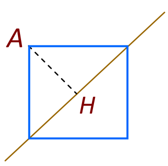
ب) خط l_2 را استاندارد کرده و فرمول بالا را در مورد نقطه‌ی $C(7,9)$ بکار می‌بریم:

$$-x+2y+7=0 \Rightarrow \frac{|-(7)+2(9)+7|}{\sqrt{(-1)^2+(2)^2}}=\frac{|18|}{\sqrt{5}}=\frac{18}{\sqrt{5}}$$

مثال: نقطه‌ی $A(2,3)$ رأس مربعی است که خط $2x+y-2=0$ یک قطر آن می‌باشد. مساحت مربع را حساب کنید.

پاسخ

با توجه به شکل، فاصله‌ی نقطه‌ی A از قطر مربع، نصف طول قطر را بدست می‌دهد:



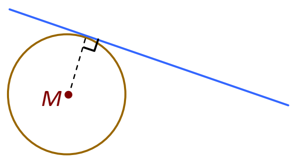
$$AH=\frac{|۲(۲)+۳-۲|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\frac{|۵|}{\sqrt{۵}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$

پس قطر مربع $d=۲\sqrt{۵}$ است. با استفاده از رابطه‌ی $d=a\sqrt{۲}$ بین ضلع و قطر، طول ضلع مربع $a=\frac{d}{\sqrt{۲}}=\frac{۲\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}}$ بوده و بنابراین مساحت مربع برابر است با:

$$S=a^۲=\left(\frac{۲\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}}\right)^۲=\frac{۴\times۵}{۲}=۱۰$$

مثال: دایره‌ی به مرکز $M(۲,-۱)$ بر خط به معادله‌ی $y=\frac{۳}{۴}x-۱$ مماس است. شعاع دایره را حساب کنید.

پاسخ



می‌دانیم:

خط مماس بر دایره، بر شعاع متصل به نقطه‌ی تماس عمود است:

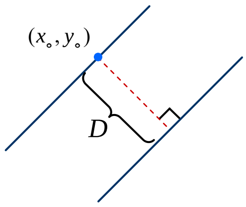
بنابراین:

شعاع برابر فاصله‌ی مرکز تا خط مماس می‌باشد:

$$y=\frac{۳}{۴}x-۱\xrightarrow{\times۴}۳x-۴y-۴=۰\Rightarrow r=\frac{|۳(۲)-۴(-۱)-۴|}{\sqrt{(۳)^۲+(-۴)^۲}}=\frac{۶}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۶}{۵}$$

مثال: فاصله‌ی دو خط موازی $l_۱:\ ۲x+y=-۱$ و $l_۲:\ ۲y=-۴x+۳$ را بیابید.

پاسخ



چنان که از شکل می‌توان فهمید، کافی است:

یک نقطه دلخواه روی یکی از خط‌ها انتخاب کرده و فاصله‌اش را تا خط دیگر حساب کرد.

نقطه‌ی $(۰,-۱)$ روی خط $l_۱$ است، فاصله‌ی آن تا خط $l_۲:\ ۴x+۲y-۳=۰$ را حساب می‌کنیم که در واقع همان فاصله‌ی بین این دو خط موازی است:

$$D=\frac{|۴(۰)+۲(-۱)-۳|}{\sqrt{(۴)^۲+(۲)^۲}}=\frac{|-۵|}{\sqrt{۲۰}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۵}}$$

توجه کنید:

همیشه می‌توان با ضرب عددهای مناسب در معادلات دو خط موازی، آن‌ها را با ضرایب یکسان به شکل $l_۱:\ ax+by+c=۰$ و $l_۲:\ ax+by+c'=۰$ نوشت. در این صورت، فاصله‌ی آن‌ها مستقیماً چنین محاسبه می‌شود:

$$D=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

برای نمونه؛ در مثال قبل، معادله‌ی اول را در عدد ۲ ضرب کنید. خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l}l_۱:\ ۴x+۲y+۲=۰\\ l_۲:\ ۴x+۲y-۳=۰\end{array}\right\}\Rightarrow D=\frac{|۲-(-۳)|}{\sqrt{۴^۲+۲^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۲۰}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۵}}$$

مثال: معادلات دو ضلع یک مربع به صورت $۲x+۳y=-۴$ و $۴x+۶y+m=۰$ است. اگر مـساحت مربـع $\frac{۹}{۱۳}$ باشـد، مقدار m را حساب کنید.

پاسخ

چون دو ضلع داده شده موازی هستند، فاصله‌ی آن‌ها برابر ضلع مربع است. به روش کوتاه بالا:

$$\left.\begin{array}{l} ۴x+۶y+۸=۰ \\ ۴x+۶y+m=۰ \end{array}\right\} \Rightarrow a=\frac{|m-۸|}{\sqrt{۴^۲+۶^۲}}=\frac{|m-۸|}{\sqrt{۵۲}}$$

پس مساحت برابر $S=a^۲=\frac{(m-۸)^۲}{۵۲}$ بوده است. طبق فرض:

$$\frac{(m-۸)^۲}{۵۲}=\frac{۹}{۱۳} \to (m-۸)^۲=\frac{۹\times ۵۲}{۱۳}=۹\times ۴=۳۶$$

$$\to m-۸=\pm ۶ \to \left\langle \begin{array}{l} m-۸=۶ \Rightarrow m=۱۴ \\ m-۸=-۶ \Rightarrow m=۲ \end{array}\right.$$

بخش ۲
معادله‌ی درجه دوم

در این بخش، تعیین جواب‌های معادله‌ی درجه دوم و ارتباط بین آن‌ها بررسی می‌شود. ابتدا روش‌های حل این نوع معادله را یادآوری می‌کنیم.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $(2x+1)^2-9=0$

ب) $x^2-4x+4=1$

پاسخ

الف) طبق قاعده‌ی « $x^2=a \Rightarrow x=\pm\sqrt{a}$ » می‌نویسیم:

$$(2x+1)^2=9 \to \begin{cases} 2x+1=3 \to 2x=2 \Rightarrow x=1 \\ 2x+1=-3 \to 2x=-4 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

ب) سمت چپ معادله به صورت اتحاد مربع دوجمله‌ای است و در نتیجه می‌توان مانند قسمت قبل عمل کرد:

$$(x-2)^2=1 \to \begin{cases} x-2=1 \to x=3 \\ x-2=-1 \to x=1 \end{cases}$$

توجه کنید:

سریع‌ترین روش حل معادله، در صورت امکان، روش تجزیه کردن و استفاده از قاعده‌ی زیر است:

$$\boxed{P\times Q=0 \Rightarrow P=0 \quad \text{یا} \quad Q=0}$$

مثال: هر یک از معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

الف) $x^2-3x=0$

ب) $x^2-x=6$

پ) $3x^2+4x+1=0$

پاسخ

الف) با فاکتورگیری، تجزیه انجام می‌شود:

$$x^2-3x=0 \to x(x-3)=0 \to \begin{cases} x=0 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

ب) جملات را به سمت چپ برده و تجزیه را طبق اتحاد جمله مشترک انجام می‌دهیم:

$$x^2-x-6=0 \to (x+2)(x-3)=0 \to \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

پ) چون x^2 دارای ضریب است، باید ضریب را به مجذور تبدیل کرده و سپس طبق اتحاد جمله مشترک عمل کنیم: