به نام خدا

کتاب آموزش ریاضی

حسابان ۲

مولف :

فرهاد شعبانی

انتشارات ارسطو

(سازمان چاپ و نشر ایران - ۱۴۰۲)

سرشناسه : شعبانی، فرهاد، ۱۳۶۶
عنوان و نام پدیدآور :کتاب آموزش ریاضی (حسابان ۲)/ مولف فرهاد شعبانی.
مشخصات نشر : ارسطو (سامانه اطلاع رسانی چاپ و نشر ایران)، ۱۴۰۲.
مشخصات ظاهری : ۱۷۰ ص.
شابک : ۶-۱۵۷-۳۳۹-۶۲۲-۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی : فیپا
موضوع : آموزش ریاضی
رده بندی کنگره : HD۶۲/۴
رده بندی دیویی : ۶۵۸/۱۴
شماره کتابشناسی ملی : ۹۱۸۱۸۲۴
اطلاعات رکورد کتابشناسی : فیپا

نام کتاب : کتاب آموزش ریاضی (حسابان ۲)
مولف : فرهاد شعبانی
ناشر : ارسطو (سامانه اطلاع رسانی چاپ و نشر ایران)
صفحه آرایی، تنظیم و طرح جلد: پروانه مهاجر
تیراژ : ۱۰۰۰ جلد
نوبت چاپ : اول – ۱۴۰۲
چاپ : زبرجد
قیمت : ۱۳۶۰۰۰ تومان
فروش نسخه الکترونیکی – کتاب‌رسان :
https://chaponashr.ir/ketabresan
شابک : ۶-۱۵۷-۳۳۹-۶۲۲-۹۷۸
تلفن مرکز پخش : ۰۹۱۲۰۲۳۹۲۵۵
www. chaponashr. ir

انتشارات ارسطو

فهرست کل بخش‌ها

حسابان (۲)

دوازدهم ریاضی

۱

تابع

بخش ۱
تغییرات افقی نمودار

روش‌های انتقال افقی نمودار به صورت زیر یادآوری می‌شود.

انتقال افقی:

انتقال افقی نمودار $y=f(x)$ به دو صورت است: $(a>0)$

- برای رسم نمودار تابع $y=f(x+a)$:

نمودار $y=f(x)$ را به اندازه‌ی a به صورت **افقی به سمت چپ** منتقل می‌کنیم.

- برای رسم نمودار تابع $y=f(x-a)$:

نمودار $y=f(x)$ را به اندازه‌ی a به صورت **افقی به سمت راست** منتقل می‌کنیم.

دلیل:

اگر نقطه‌ی (x_0,y_0) روی نمودار $y=f(x)$ باشد: $f(x_0)=y_0$ ، آنگاه انتقال یافته‌ی نقطه به اندازه‌ی a به چپ، یعنی: (x_0-a,y_0) روی نمودار $y=f(x+a)$ قرار دارد:

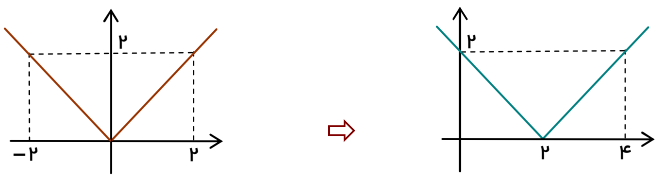
$$y=f(x+a)\xrightarrow{x=x_0-a} f((x_0-a)+a)=f(x_0)=y_0$$

به صورت مشابه؛

انتقال یافته‌ی نقطه به اندازه‌ی a به راست، یعنی: (x_0+a,y_0) روی نمودار $y=f(x-a)$ قرار دارد.

برای نمونه؛

نمودار تابع $f(x)=|x-2|$ را با استفاده از انتقال نمودار $y=|x|$ رسم می‌کنیم:

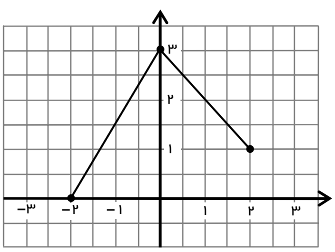


$y=|x|$ ⇨ $y=|x-2|$

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۱

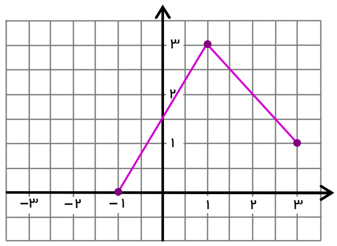
نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است.

نمودار تابع $g(x)=f(x-1)$ را رسم کرده و دامنه‌ی آن را تعیین کنید.



پاسخ

باید نمودار یک واحد به راست منتقل شود.



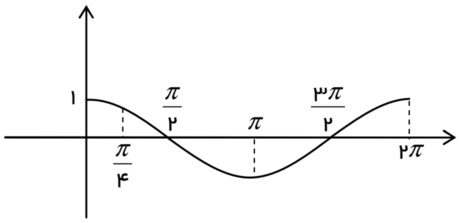
می‌بینید:
دامنه‌ی تابع g برابر $[-۱,۳]$ است.

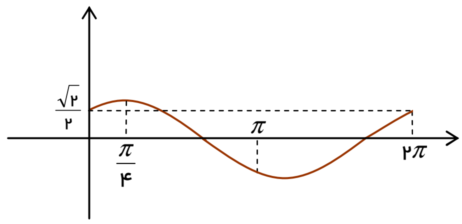
نهایی؛ خرداد ۱۴۰۰

نمودار تابع $y=\cos(x-\frac{\pi}{۴})$ را به کمک نمودار $y=\cos x$ در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ رسم کنید.

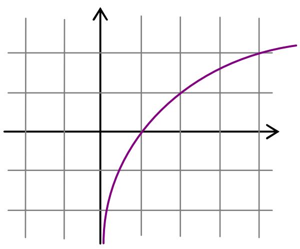
پاسخ

باید ابتدا نمودار $y=\cos x$ را رسم کرده و سپس آن را به اندازه‌ی $\frac{\pi}{۴}$ به سمت راست انتقال دهیم:





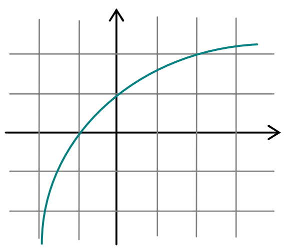
مثال: (از کتاب) نمودار تابع $y=\log_۲ x$ به صورت مقابل رسم شده است.



نمودار تابع $y=\log_۲(x+۲)$ را با انتقال رسم کنید.

پاسخ

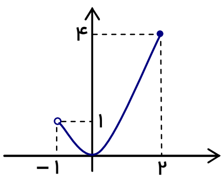
باید نقاط نمودار، دو واحد به چپ منتقل شوند:



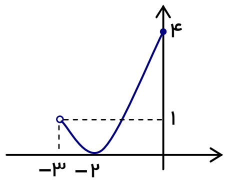
مثال: نمودار تابع $y=(x+۲)^۲$ را توسط انتقال در بازه‌ی $(-۳,۰]$ رسم کرده و برد آن را معلوم کنید.

پاسخ

باید نمودار $y=x^{۲}$ را در بازه‌ی $(-۱,۲]$ رسم کنیم تا بعد از ۲ واحد حرکت به چپ، دامنه‌ی آن $(-۳,۰]$ شود:



$y=x^{۲}$



$y=(x+۲)^{۲}$

می‌بینید که برد تابع در هر دو نمودار $[۰,۴]$ است.

روشی دیگر برای تغییر افقی نمودار به صورت زیر است:

انبساط و انقباض افقی:

وقتی نمودار یک تابع f را داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$:

- ❖ نقاطی با طول و عرض مشخص از نمودار مشخص می‌کنیم.
- ❖ طول این نقاط بر k تقسیم شده و عرض نقطه ثابت می‌ماند.

بویژه:

- ▪ اگر $۰<k<۱$ باشد، نمودار به صورت افقی گسترده می‌شود، (انبساط می‌یابد.)
- ▪ اگر $k>۱$ باشد، نمودار به صورت افقی جمع می‌شود، (انقباض می‌یابد.)

دلیل:

اگر نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$ روی نمودار $y=f(x)$ باشد: $f(x_۰)=y_۰$ ، نقطه‌ی $(\frac{x_۰}{k},y_۰)$ روی نمودار $y=f(kx)$ قرار دارد:

$$y=f(kx)\xrightarrow{x=\frac{x_۰}{k}} f(k(\frac{x_۰}{k}))=f(x_۰)=y_۰$$

مثال: نمودار تابع $g(x)=|۲x|$ را با تغییر مناسب نمودار $f(x)=|x|$ رسم کنید.

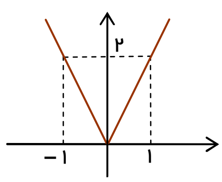
پاسخ

با توجه به نمودار $f(x)=|x|$ و طبق نکته‌ی قبل، نمودار $g(x)=f(۲x)$ را رسم می‌کنیم:

$$(-۲,۲)\in f \xrightarrow{k=۲} (\frac{-۲}{۲},۲)=(-۱,۲)\in g$$

$$(۰,۰)\in f \longrightarrow (\frac{۰}{۲},۰)=(۰,۰)\in g$$

$$(۲,۲)\in f \longrightarrow (\frac{۲}{۲},۲)=(۱,۲)\in g$$



$g(x)=|۲x|$

نهایی؛ خرداد ۱۳۹۸

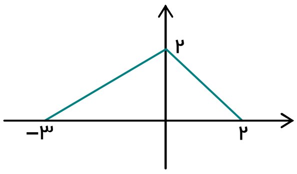
اگر $k>1$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به‌دست می‌آید.

(درست ☐ – نادرست ☐)

پاسخ

نادرست است؛ زیرا برای $k>1$ نمودار به صورت افقی منقبض می‌شود.

مثال: نمودار تابع f به شکل مقابل است:



الف) نمودار $y=f(\frac{x}{2})$ را رسم کنید.

ب) دامنه و برد تابع جدید را مشخص کنید.

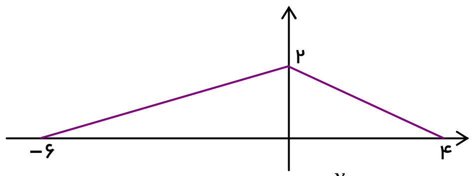
پاسخ

باید طول نقاط بر $k=\frac{1}{2}$ تقسیم شود؛ در واقع؛ طول نقاط در عدد ۲ ضرب می‌شود:

$$(-3,0)\in f \xrightarrow{k=\frac{1}{2}} (\frac{-3}{\frac{1}{2}},0)=(-6,0)$$

$$(0,2)\in f \xrightarrow{0\times 2=0} (0,2)$$

$$(2,0)\in f \xrightarrow{2\times 2=4} (4,0)$$



$y=f(\frac{x}{2})$

در نمودار حاصل شده، دامنه $[-6,4]$ و برد $[0,2]$ است.

حالت خاص: (مهم)

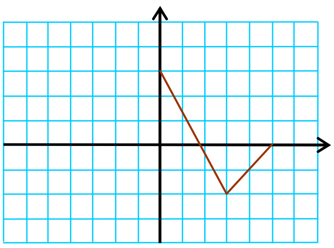
در رسم $y=f(kx)$، مقدار $k=-1$ ضابطه را به $y=f(-x)$ تبدیل می‌کند و برای رسم آن کافی است:

نمودار $f(x)$ نسبت به محور عرض‌ها قرینه شود.

نهایی؛ شهریور ۱۳۹۸

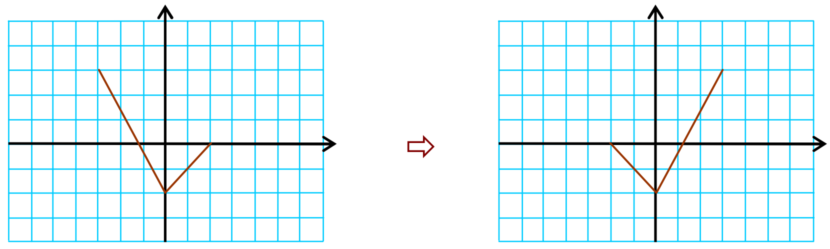
نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است.

نمودار تابع $g(x)=f(3-x)$ را رسم کرده و دامنه‌ی آن را تعیین کنید.



پاسخ

کافی است ابتدا $f(۳+x)$ (سه واحد انتقال به چپ) و سپس $f(۳-x)$ یعنی (قرینه نسبت به محور عرض) انجام گیرد:



$f(x+۳)$ $\qquad$ $f(-x+۳)$

در نمودار پایانی می‌بینید که:

$$D_g=[-۲,۳]$$

توجه کنید:

در جابجایی افقی همیشه:

برد تابع ثابت مانده و فقط دامنه ممکن است تغییر کند.

توضیح بیشتر:

اگر دامنه‌ی تابع $f(x)$ به صورت $[x_۱,x_۲]$ باشد، آنگاه:

دامنه‌ی توابع $f(x-a)$ و $f(x+a)$ بـه ترتیـب $[x_۱+a,x_۲+a]$ و $[x_۱-a,x_۲-a]$ هـستند و دامنـه‌ی $f(kx)$ برابـر $[\frac{x_۱}{k},\frac{x_۲}{k}]$ است. (اگر k منفی باشد: $[\frac{x_۲}{k},\frac{x_۱}{k}]$.)

برای نمونه؛

اگر دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $[-۴,۱]$ باشد، دامنه‌ی تابع $y=-۲f(-\frac{x}{۲})+۱$ برابر است با:

$$\xrightarrow{k=-\frac{۱}{۲}}[\frac{۱}{-\frac{۱}{۲}},\frac{-۴}{-\frac{۱}{۲}}]=[-۲,۸]$$

بخش ۲

تغییرات عمودی نمودار

ساده‌ترین نوع تغییر عمودی نمودار تابع به صورت زیر است:

انتقال عمودی:

وقتی نمودار f را داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+k$، طول نقاط ثابت مانده و فقط عرض آن‌ها را به اندازه‌ی k در جهت عمودی انتقال می‌دهیم. به طور دقیق‌تر:

- اگر k **مثبت** باشد، نمودار به اندازه‌ی k به **بالا** منتقل می‌شود.
- اگر k **منفی** باشد، نمودار به اندازه‌ی k به **پایین** منتقل می‌شود.

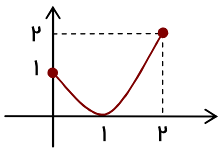
دلیل:

اگر نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ روی نمودار $y=f(x)$ باشد: $f(x_\circ)=y_\circ$، آنگاه انتقال یافته‌ی عمودی نقطه به انـدازه‌ی k، یعنـی: $(x_\circ, y_\circ+k)$ روی نمودار $y=f(x)+k$ قرار دارد:

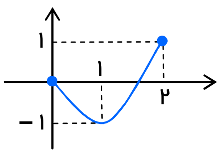
$$y=f(x)+k \xrightarrow{x=x_\circ} f(x_\circ)+k=y_\circ+k$$

برای نمونه؛

نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت روبرو داده شده است:



در رسم نمودار تابع $y=f(x)-۱$، عرض هر نقطه یک واحد کم می‌شود:



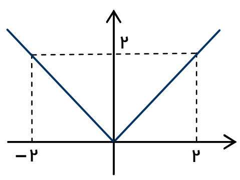
دامنه و برد تابع جدید:

$$D=[\circ,۲] \quad و \quad R=[-۱,۱]$$

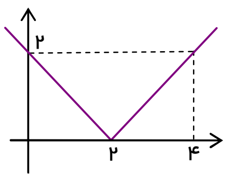
مثال: نمودار تابع $f(x)=|x-۲|-۲$ را با تغییرات مناسب نمودار $y=|x|$ رسم کرده و برد آن را مشخص کنید.

پاسخ

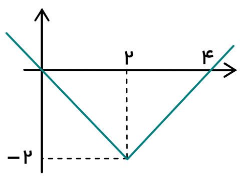
ابتدا انتقال به راست $|x-۲|$ و سپس انتقال به پایین:



$y=|x|$



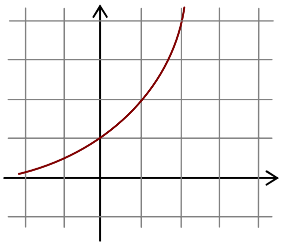
$y=|x-۲|$



$y=|x-۲|-۲$

می‌بینید که برد $R_f=[-۲,+\infty)$ است.

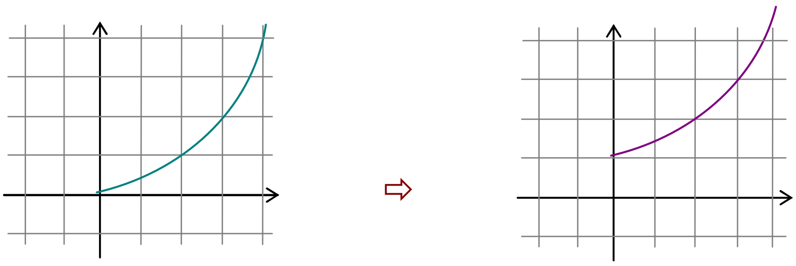
مثال: (مشابه کتاب) نمودار تابع $y=2^x$ به صورت مقابل رسم شده است.



نمودار تابع $y=2^{x-2}+1$ را با انتقال رسم کنید.

پاسخ

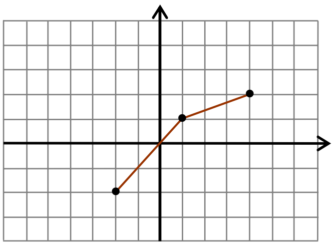
ابتدا دو واحد به راست $y=2^{x-1}$ و سپس یک واحد به بالا:



نهایی؛ خرداد ۱۳۹۹

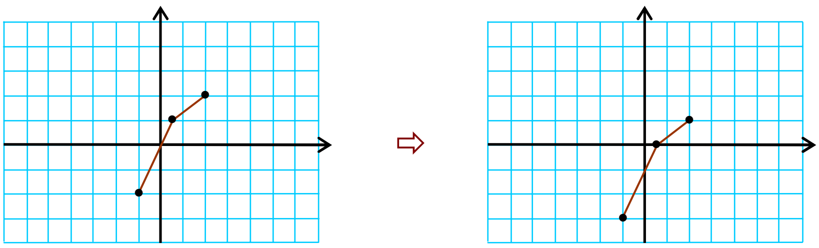
نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است.

نمودار تابع $g(x)=f(2x)-1$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.



پاسخ

ابتدا $f(2x)$ (تقسیم طول نقاط بر ۲) و سپس $g(x)=f(2x)-1$ یعنی (یک واحد به پایین):



$f(2x)$ $\qquad$ $f(2x)-1$

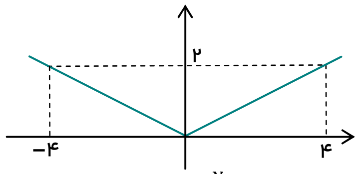
در نمودار پایانی می‌بینید که:

$D_g=[-1,2]$ و $R_g=[-3,1]$

مثال: نمودار تابع $h(x)=|\frac{x}{2}|-1$ را با تغییرات مناسب نمودار $f(x)=|x|$ رسم کنید.

پاسخ

ابتدا مشابه نمونه‌های بالا، انبساط افقی $|\frac{x}{۲}|$ را رسم می‌کنیم:



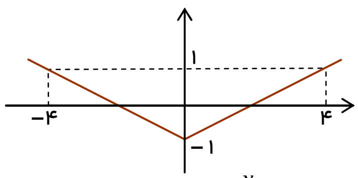
$y=|\frac{x}{۲}|$

$$(-۲,۲)\in f \xrightarrow{k=\frac{۱}{۲}} (\frac{-۲}{\frac{۱}{۲}},۲)=(-۴,۲)$$

$$(۰,۰)\in f \longrightarrow (\frac{۰}{\frac{۱}{۲}},۰)=(۰,۰)$$

$$(۲,۲)\in f \longrightarrow (\frac{۲}{\frac{۱}{۲}},۲)=(۴,۲)$$

اکنون کافی است، عرض نقاط یک واحد کم شود:



$h(x)=|\frac{x}{۲}|-۱$

روشی دیگر در تغییر عمودی نمودار:

انبساط و انقباض عمودی:

وقتی نمودار یک تابع f را داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y=k\,f(x)$، طول نقاط ثابت مانده و فقط عرض آن‌ها در عدد k ضرب می‌شود. به طور دقیق‌تر:

- اگر $k>۱$ باشد، اندازه‌ها بزرگ‌تر شده و نمودار به صورت عمودی گسترده می‌شود. (نمودار انبساط می‌یابد.)
- اگر $۰<k<۱$ باشد، اندازه‌ها کوچک‌تر شده و نمودار به صورت عمودی جمع می‌شود. (نمودار انقباض می‌یابد.)

دلیل:

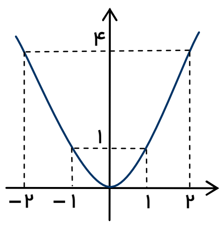
اگر نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$ روی نمودار $y=f(x)$ باشد: $f(x_۰)=y_۰$، آنگاه نقطه‌ی $(x_۰,ky_۰)$ روی نمودار $y=k\,f(x)$ قرار دارد:

$$y=kf(x) \xrightarrow{x=x_۰} kf(x_۰)=ky_۰$$

مثال: نمودار تابع $g(x)=۲x^۲-۱$ را با تغییرات مناسب نمودار $y=x^۲$ رسم کنید.

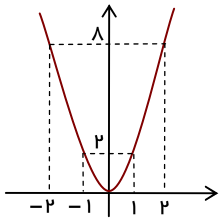
پاسخ

ابتدا نمودار $y = x^2$ را رسم می‌کنیم:

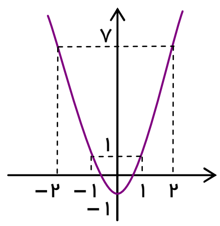


اکنون در دو مرحله نمودار تابع g رسم می‌شود:

$y=2x^2$



⇨



$y=2x^2-1$

مثال: درستی یا نادرستی هر مورد را معلوم کنید.

الف) اگر دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $[-4,1]$ باشد، دامنه‌ی تابع $y=-2f(\frac{x}{2})$ برابر $[-2,\frac{1}{2}]$ است.

ب) اگر نقطه‌ی $(-3,1)$ روی نمودار f باشد، نقطه‌ی $(-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ روی نمودار تابع $y=-2f(2x)$ است.

پ) برای رسم نمودار تابع $y=|2x-1|$ توسط نمودار $y=|x-1|$، کافی است طول هر نقطه از نمودار تابع دوم بر عدد ۲ تقسیم شود.

پاسخ

الف) نادرست است؛

چون طول نقاط بر $\frac{1}{2}$ تقسیم شده و خواهیم داشت: $D=[-8,2]$ $\xleftarrow{\div\frac{1}{2}}$ $[-4,1]$

ب) نادرست است؛

طول نقطه بر ۲ تقسیم شده و به $-\frac{3}{2}$ تبدیل می‌شود، ولی عرض نقطه تغییر نمی‌کند: $(-3,1) \rightarrow (-\frac{3}{2},1)$

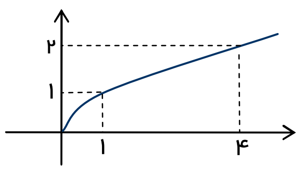
پ) درست است؛

اگر قرار دهیم: $f(x)=|x-1|$ ، در این صورت $f(2x)=|2x-1|$ بوده و روش گفته شده برای رسم صحیح است.

مثال: با رسم نمودار $y=\sqrt{x}$ توسط نقطه گذاری، نمودار تابع $y=-2\sqrt{x}+1$ را رسم کنید.

پاسخ

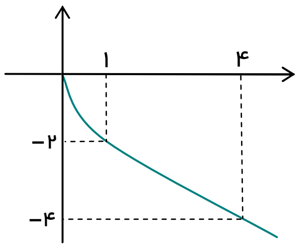
جدولی از مقادیر تابع با طول‌های نامنفی تشکیل داده و نمودار را رسم می‌کنیم:

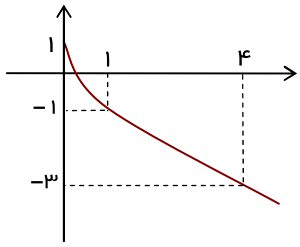


x	۰	۱	۴
y	۰	۱	۲

اکنون در دو مرحله؛ ابتدا ضرب عرض‌ها در -۲ و سپس جمع عرض‌های جدید با عدد ۱، نمودار خواسته شده رسم می‌شود:

$y=-۲\sqrt{x}$





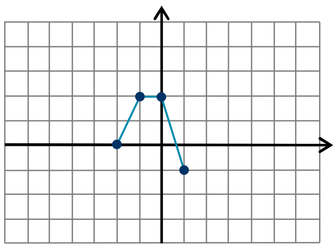
$y=-۲\sqrt{x}+۱$

می‌بینید در تابع آخری، برد $R=(-\infty,۱]$ است.

نهایی؛ خرداد ۱۳۹۸

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است.

نمودار تابع $g(x)=۲f(x-۱)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

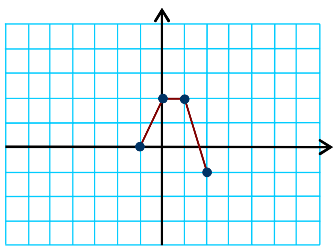


پاسخ

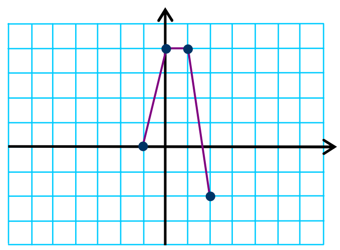
به آسانی و با دو تبدیل متوالی زیر، نمودار رسم می‌شود:

اول: تبدیل $(x\to x-۱)$، یک واحد انتقال به راست.

دوم: تبدیل $f(x-۱)\to ۲f(x-۱)$، انبساط عمودی با $k=۲$.



$f(x-۱)$



$۲f(x-۱)=g(x)$

در نمودار پایانی می‌بینید که:

$$R_g=[-۲,۴] \quad و \quad D_g=[-۱,۲]$$

توجه کنید:

در رسم نمودار $y=-f(x)$ وقتی نمودار تابع f داده شده، چون عرض‌ها قرینه می‌شوند:

نمودار تابع f نسبت به محور طول قرینه می‌شود.

نهایی؛ شهریور ۱۳۹۸

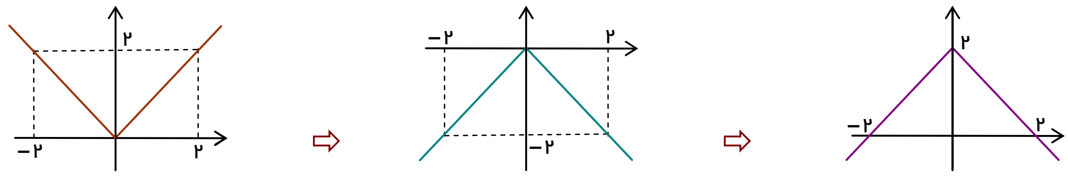
نمودار تابع $y=-f(x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به کدام محور است؟

(بدیهی: پاسخ محور طول است.)

مثال: مساحت محدود به نمودار $y=-|x|+۲$ و محور طول‌ها را بیابید.

پاسخ

با دو جابجایی و به سادگی نمودار رسم می‌شود:

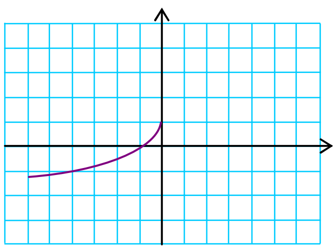


$y=|x|$ ⇨ $y=-|x|$ ⇨ $y=-|x|+۲$

می‌بینید که محدوده‌ی مورد نظر، مثلثی با ارتفاع و قاعده‌ی مشخص است:

$$S=\frac{۲\times۴}{۲}=۴$$

مثال: (مشابه کتاب) نمودار مقابل فقط توسط دو عمل انتقال و قرینه سازی از نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به‌دست آمده است. ضابطه‌ی تابع مربوطه را بنویسید.



پاسخ

با قدری دقت می‌توان فهمید بعد از رسم نمودار $y=\sqrt{x}$:

اول: قرینه سازی نسبت به محور طول: $y=-\sqrt{x}$

دوم: قرینه سازی نسبت به محور عرض: $y=-\sqrt{-x}$

سوم: یک واحد انتقال عمودی به سمت بالا: $y=-\sqrt{-x}+۱$

پس ضابطه‌ی تابع به صورت $y=-\sqrt{-x}+۱$ است.

توجه کنید:

در انتقال عمودی همیشه:

دامنه‌ی تابع ثابت مانده و فقط برد تغییر خواهد کرد.

توضیح بیشتر:

اگر برد تابع $f(x)$ به صورت $[y_۱,y_۲]$ باشد، آنگاه:

برد توابع $f(x)-k$ و $f(x)+k$ به ترتیب $[y_۱-k,y_۲-k]$ و $[y_۱+k,y_۲+k]$ هستند و برد $kf(x)$ برابر $[ky_۱,ky_۲]$ است. (اگر k منفی باشد: $[ky_۲,ky_۱]$).

برای نمونه؛

اگر برد تابع f بازه‌ی $[-۴,۱]$ باشد، برد تابع $y=-۲f(-\frac{x}{۲})+۱$ برابر است با:

$$[-۲(۱)+۱,-۲(-۴)+۱]=[-۱,۹]$$

بخش ۳

توابع چندجمله‌ای

شکل کلی تابع چندجمله‌ای:

$$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+kx+l$$

که a، b، ....، k و l عددهایی حقیقی و n عددی طبیعی و درجه‌ی تابع است.

چند حالت ویژه‌ی این توابع:

- **تابع ثابت:**

سادهترین تابع به صورت $f(x)=c$ چند جمله‌ای درجه‌ی صفر است. (c عدد ثابت)

- **تابع خطی:**

تابع به صورت $f(x)=ax+b$ چند جمله‌ای درجه‌ی یک می‌باشد.

- **تابع درجه دوم:**

این تابع به صورت $f(x)=ax^2+bx+c$ است، نمودارش همیشه یک سهمی است که در سال یازدهم بررسی گردید.

- **تابع درجه سوم:**

این توابع به صورت $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ هستند که بررسی بیشتری از نمودار آن‌ها در ادامه‌ی این درس انجام خواهد شد.

نهایی؛ شهریور ۱۳۹۸

درجه‌ی تابع $f(x)=x^2(1-x)^5$ را مشخص کنید.

پاسخ

درجه‌ی ۷ است، زیرا:

بزرگ‌ترین درجه‌ی $(1-x)^5$ با پنج بار ضرب $(1-x)$ در خودش، مربوط به جمله‌ی $-x^5$ است و در نتیجه، در $f(x)=x^2(1-x)^5$، بزرگ‌ترین درجه مربوط به $x^2(-x^5)=-x^7$ خواهد بود.

مثال: در یک تابع خطی f، رابطه‌ی $f(x+2)=f(x)+2$ برقرار بوده و $f(2)=5$ است. مقدار $f(-1)$ را حساب کنید.

پاسخ

طبق شرط اول با قرار دادن $x=2$ داریم:

$$f(2+2)=f(2)+2 \Rightarrow f(4)=5+2=7$$

تابع را به صورت $f(x)=ax+b$ در نظر گرفته و با جایگذاری مقادیر در ضابطه‌ی تابع می‌نویسیم:

$$f(2)=5 \rightarrow 2a+b=5$$

$$f(4)=7 \rightarrow 4a+b=7$$

از تفریق دو معادله $a=1$ و سپس $b=3$ بدست خواهند آمد و بنابراین:

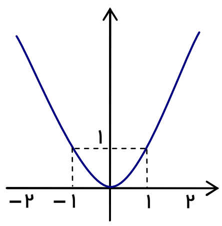
$$f(x)=x+۳ \Rightarrow f(-۱)=-۱+۳=۲$$

------------✧------------

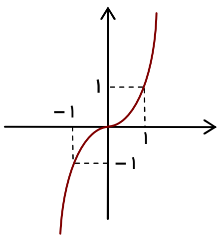
مثال: ابتدا نمودار تابع‌های $f(x)=x^۲$ و $g(x)=x^۳$ را رسم کنید و سپس توسط نمودار، مجموعه جواب نامعادله‌ی $f(x)>g(x)$ را مشخص کنید.

پاسخ

هر دو نمودار با تشکیل جدول مقادیر به آسانی رسم می‌شوند:



x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y=x^۲$	۴	۱	۰	۱	۴



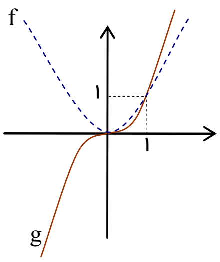
x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y=x^۳$	-۸	-۱	۰	۱	۸

می‌دانیم:

عددهای بین صفر و یک هر قدر به توان بزرگ‌تری برسند، مقدارشان کوچک‌تر می‌شود. یعنی:

$$۰<x<۱ \Rightarrow x^۳<x^۲$$

بنابراین دو نمودار بالا در مقایسه با هم چنین خواهند بود:



اکنون:

مجموعه جواب نامعادله‌ی $f(x)>g(x)$ بخش‌هایی از محور طول‌هاست که در آن نمودار f بالاتر از نمودار g قرار داشته باشد:

$$f(x)>g(x) \Rightarrow x\in(-\infty,۰)\cup(۰,۱)$$

------------✧------------

نهایی؛ خرداد ۱۳۹۹

نمودار تابع $g(x)=x^۳$ در فاصله‌ی $[۰,۱]$ پایین‌تر از نمودار تابع $f(x)=x^۲$ قرار دارد. (**درست** ☐ - **نادرست** ☐)

پاسخ

نادرست است؛

در نقاط $x=۰$ و $x=۱$ نمودارها بر هم منطبق بوده، ولی بین ۰ و ۱ نمودار g پایین‌تر قرار دارد.

------------✧------------

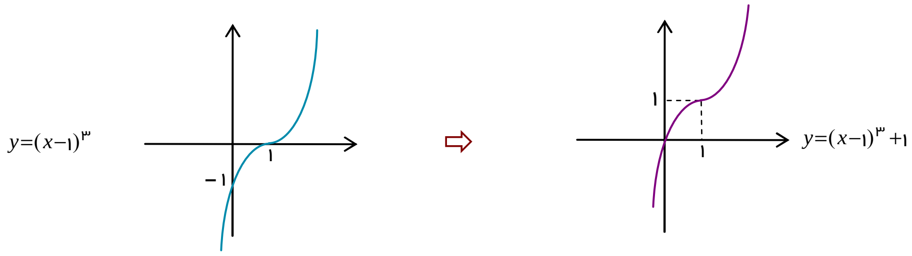
مثال: (از کتاب) نمودار تابع $y=x^{3}-3x^{2}+3x$ را به کمک نمودار $y=x^{3}$ رسم کنید.

پاسخ

با اضافه و کم کردن عدد ۱ در سمت راست، ضابطه قابل رسم توسط انتقال می‌شود:

$$y=x^{3}-3x^{2}+3x-1+1=(x-1)^{3}+1$$

پس کافی است نمودار $y=x^{3}$ ابتدا یک واحد به راست و سپس یک واحد به بالا منتقل شود:



-----------✧-----------

مثال: فقط توضیح دهید که نمودار تابع $y=-(x-1)^{3}+3$ چگونه توسط نمودار $y=x^{3}$ رسم می‌شود.

پاسخ

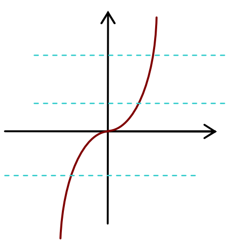
نمودار در طی سه مرحله رسم می‌شود:

- بعد از رسم $y=x^{3}$، نمودار یک واحد به راست منتقل شده تا $y=(x-1)^{3}$ رسم شود.
- نمودار حاصل در مرحله‌ی قبل را نسبت به محور طول قرینه کرده تا $y=-(x-1)^{3}$ رسم شود.
- عرض نقاط نمودار حاصل از مرحله‌ی قبل را با عدد ۳ جمع کرده تا $y=-(x-1)^{3}+3$ رسم شود.

-----------✧-----------

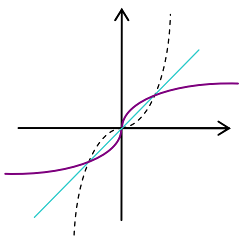
مثال: (از کتاب) با توجه به نمودار $f(x)=x^{3}$، نشان دهید این تابع وارون‌پذیر است. سپس، نمودار f^{-1} را رسم کرده و ضابطه‌ی تابع وارون را تعیین کنید.

پاسخ



چون هر خط افقی نمودار را در بیش از یک نقطه قطع نمی‌کند، تابع f یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است.

رسم با قرینه سازی نمودار نسبت به خط انجام می‌شود:



تعیین ضابطه‌ی وارون به روش گفته شده در پایه‌ی یازدهم:

$$y=x^{3}\ \rightarrow\ x=\sqrt[3]{y}\ \Rightarrow\ f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$$

-----------✧-----------

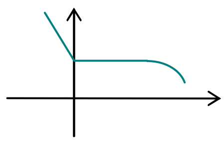
بخش ۴

توابع یکـــنوا

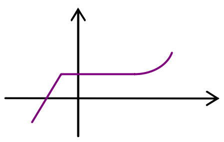
فرض کنید f یک تابع باشد.

❖ f را **«صعودی»** گوییم، هرگاه اگر $x_1 < x_2$ باشد، آنگاه $f(x_1) \le f(x_2)$. یعنی:
با زیاد شدن x، مقدار تابع یا ثابت بماند و یا زیاد شود.

❖ f را **«نزولی»** گوییم، هرگاه اگر $x_1 < x_2$ باشد، آنگاه $f(x_1) \ge f(x_2)$. یعنی:
با زیاد شدن x، مقدار تابع یا ثابت بماند و یا کم شود.



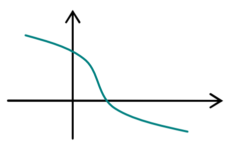
تابع نزولی



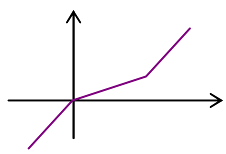
تابع صعودی

❖ تابع f را **«اکیداً صعودی»** گوییم، هرگاه اگر $x_1 < x_2$ باشد، آنگاه $f(x_1) < f(x_2)$. یعنی:
با زیاد شدن x، مقدار تابع زیاد می‌شود.

❖ تابع f را **«اکیداً نزولی»** گوییم، هرگاه اگر $x_1 < x_2$ باشد، آنگاه $f(x_1) > f(x_2)$. یعنی:
با زیاد شدن x، مقدار تابع کم می‌شود.



تابع اکیداً نزولی



تابع اکیداً صعودی

بعلاوه:

تابع صعودی یا نزولی را **«یکنوا»** و تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی را **«اکیداً یکنوا»** گوییم.

توجه کنید:

طبق تعریف، تابع اکیداً صعودی، صعودی هم هست و تابع اکیداً نزولی، نزولی هم محسوب می‌شود.

مثال: تابع ثابت $f(x) = k$ شرط صعودی بودن را دارد، زیرا $f(x_1) \le f(x_2)$ همان $k \le k$ بوده که برقرار است. واضح است که تابع ثابت نزولی هم هست. بنابراین:

تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است؛ ولی اکیداً یکنوا نیست.

نهایی؛ خرداد ۱۳۹۹

اگر تابع $f(x)$ در یک فاصله صعودی باشد، آنگاه اکیداً صعودی هم خواهد بود. (درست ☐ – نادرست ☐)

پاسخ

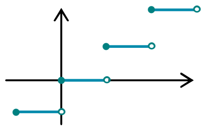
نادرست است؛

برای نمونه، تابع ثابت $f(x)=1$ صعودی است، ولی اکیداً صعودی نیست.

مثال: با رسم، یکنوایی توابع $y=[x]$ ، $y=x|x|$ ، $y=x^3$ و $y=|x|+x$ را روی $\mathbb{R}$ بررسی کنید.

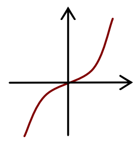
پاسخ

- نمودار تابع پله‌ای $y=[x]$ صعودی است، ولی صعودی اکید نیست.

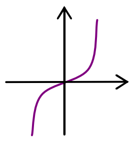


- نمودار تابع $y=x|x|$ به‌صورت زیر بوده و صعودی اکید است:

$$y=x|x|=\begin{cases}-x^2 & x<0\\ x^2 & x\geq 0\end{cases}$$

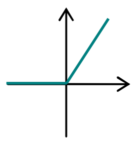


- نمودار تابع $y=x^3$ را قبلاً دیده‌ایم و صعودی اکید است:



- نمودار تابع $y=|x|+x$ به‌صورت زیر، صعودی هست، ولی صعودی اکید نیست:

$$y=x+|x|=\begin{cases}0 & x<0\\ 2x & x\geq 0\end{cases}$$

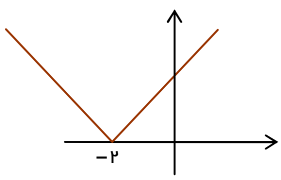


نهایی؛ شهریور ۱۳۹۸

تابع $h(x)=|x+2|$ در چه بازه‌ای اکیداً صعودی است؟

پاسخ

به روش انتقال افقی، نمودار تابع رسم می‌شود:



تابع در بازه‌ی $[-2,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

توجه کنید:

گاهی مانند نمونه‌ی قبل، تابع روی دامنه‌ی خود یکنوا نیست؛ اما:

می‌توانیم دامنه‌ی آن را طوری محدود کنیم، تا در آن دامنه یکنوا باشد. برای نمونه؛

تابع $y=x^2$ یکنوا نیست، ولی:

0916 992 5753
farhad.shabani66