به نام خدا

کتاب آموزش ریاضی

ریاضی پایه دهم

مولف :

فرهاد شعبانی

انتشارات ارسطو

(سازمان چاپ و نشر ایران - ۱۴۰۲)

نسخه الکترونیکی این اثر در سایت سازمان چاپ و نشر ایران و اپلیکیشن کتاب رسان موجود می باشد

chaponashr.ir

سرشناسه : شعبانی، فرهاد، ۱۳۶۶
عنوان و نام پدیدآور : کتاب آموزش ریاضی (ریاضی پایه دهم)/ مولف فرهاد شعبانی.
مشخصات نشر : ارسطو (سامانه اطلاع رسانی چاپ و نشر ایران)، ۱۴۰۲.
مشخصات ظاهری : ۱۹۲ ص.
شابک : ۹۷۸-۶۲۲-۳۳۹-۱۵۸-۳
وضعیت فهرست نویسی : فیپا
موضوع : آموزش ریاضی
رده بندی کنگره : HD۶۲/۵
رده بندی دیویی : ۶۵۸/۱۵
شماره کتابشناسی ملی : ۹۱۸۱۸۲۵
اطلاعات رکورد کتابشناسی : فیپا

نام کتاب : کتاب آموزش ریاضی (ریاضی پایه دهم)
مولف : فرهاد شعبانی
ناشر : ارسطو (سامانه اطلاع رسانی چاپ و نشر ایران)
صفحه آرایی، تنظیم و طرح جلد: پروانه مهاجر
تیراژ : ۱۰۰۰ جلد
نوبت چاپ : اول - ۱۴۰۲
چاپ : زبرجد
قیمت : ۱۵۵۰۰۰ تومان
فروش نسخه الکترونیکی - کتاب‌رسان :
https://chaponashr.ir/ketabresan
شابک : ۹۷۸-۶۲۲-۳۳۹-۱۵۸-۳
تلفن مرکز پخش : ۰۹۱۲۰۲۳۹۲۵۵
www. chaponashr. ir

انتشارات ارسطو

فهرست کل

ریاضی

دهم تجربی - ریاضی

۱

مجموعه، الگو و دنباله

بخش ۱

زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$

در این بخش، آشنایی بیشتر با اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ مورد نظر است، بویژه یادآوری چند زیر مجموعه‌ی مهم و معرفی انواع جدیدی از زیر مجموعه‌های آن را خواهیم دید.

اعداد صحیح:

$$\mathbb{Z}=\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\dots\}$$

چند زیر مجموعه‌ی مورد نیاز از $\mathbb{Z}$:

- **اعداد حسابی:** $W=\{0,1,2,3,4,\dots\}$
- **اعداد طبیعی:** $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,\dots\}$
- **اعداد طبیعی زوج:** $E=\{2k \mid k\in \mathbb{N}\}=\{2,4,6,\dots\}$

و مجموعه‌ی **اعداد طبیعی فرد:**

$$O=\{2k-1 \mid k\in \mathbb{N}\}=\{1,3,5,\dots\}$$

عددهای حقیقی دیگری را می‌توان توسط تقسیم دو عدد صحیح ساخت:

اعداد گویا:

نام دیگر عدد گویا، کسر متعارفی است و مجموعه‌ی تمام چنین کسرهایی چنین است:

$$\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b}:\ a,b\in \mathbb{Z}\ ,\ b\neq 0\}$$

یعنی:

تمام کسرهایی که صورت و مخرج آن‌ها دو عدد صحیح بوده و مخرج مخالف صفر باشد.

بنابراین:

تمام عددهای $\frac{2}{5}$، $\frac{-6}{2}=-3$، $\frac{12}{4}=3$ و $\frac{0}{1}=0$ مثال‌هایی از عددهای گویا بوده، ولی $\frac{2}{0}$ تعریف نشده است. بویژه:

تمام عددهای طبیعی و صحیح هم عدد گویا محسوب می‌شوند.

زیرا می‌توان به این عددها مخرج ۱ داد: $1=\frac{1}{1}$ و $2=\frac{2}{1}$ و ...

$$\mathbb{N}\subseteq W\subseteq \mathbb{Z}\subseteq \mathbb{Q}$$

توجه کنید:

معمولاً یک عدد با ظاهر رادیکالی گویا نیست، ولی لااقل وقتی که:

عدد زیر رادیکال مجذور کامل بوده یا **قابل تبدیل به صورت مجذور کامل باشد**،

عدد رادیکالی، گویا خواهد بود.

برای نمونه؛

$$\sqrt{\frac{۵}{۴۵}}=\sqrt{\frac{۱}{۹}}=\frac{۱}{۳}\in\mathbb{Q} \quad و \quad \sqrt{\frac{۹}{۴۹}}=\sqrt{(\frac{۳}{۷})^۲}=\frac{۳}{۷}\in\mathbb{Q} \quad و \quad \sqrt{۶۴}=۸\in\mathbb{Q}$$

بعلاوه:

در سال‌های قبل دیده‌ایم که بین هر دو عدد گویا، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد. در کل بدانیم:

بین هر دو عدد حقیقی دلخواه، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

معرفی دقیق عددهایی که گویا نیستند:

اعداد گنگ:

هر عدد حقیقی که گویا نباشد، **گنگ** نامیده می‌شود.

یعنی:

هر عددی که نتوان آن را به صورت تقسیم دو عدد صحیح نوشت.

بنابراین:

مجموعه‌ی اعداد گنگ دقیقاً $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ است که آن را با $\mathbb{Q}'$ یا $\mathbb{Q}^c$ نشان می‌دهیم. (**پس:** $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$)

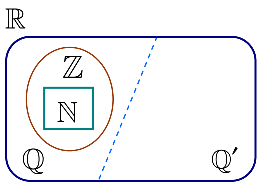
توجه کنید:

ساده‌ترین عددهای گنگ عبارتند از:

- عددهای رادیکالی نظیر $\sqrt{۲}$، $\sqrt[۳]{۹}$ و $\sqrt{\frac{۸}{۳}}$ که ساده نمی‌شوند.
- عددهایی نظیر $\sqrt{۳}-۲$ و $\sqrt{۲}+۱$ که از جمع و تفریق یک عدد گنگ و یک عدد گویا بدست می‌آیند.
- عدد π که تقریباً برابر $۳/۱۴$ است و در محاسبه‌ی محیط و مساحت دایره به‌کار می‌رود.

بنابراین؛

اعداد حقیقی و زیرمجموعه‌های معروف آن با نمودار ون به صورت روبرو است:



مثال: جواب هر مورد را نوشته و آن را با جمله‌ای مختصر، توصیف کنید.

① $\mathbb{R}-\mathbb{Q}'$

② $\mathbb{Z}-W$

③ $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

محور اعداد:

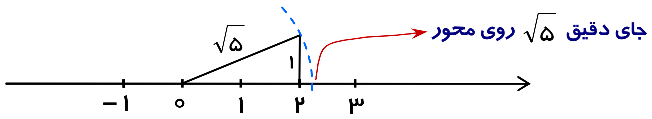
از سال‌های قبل می‌دانیم:

اعداد حقیقی را می‌توان با نقاط روی محور اعداد یکی گرفت.

بویژه:

- **اعداد گویا:** هر عدد گویا را می‌توان با توجه به مقدار مخرج آن و تقسیم هر واحد از محور، نمایش داد.
- **اعداد گنگ:** برخی از عددهای گنگ را نیز می‌توان توسط رابطه‌ی فیثاغورس روی محور مشخص کرد.

برای نمونه، نمایش عدد $\sqrt{5}$ روی محور را ببینید:



بعلاوه:

مانند عددهای گویا، بین هر دو عدد، بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد.

مثال: هر عدد را به صورت تقریبی روی محور اعداد نمایش دهید.

الف) $-\frac{7}{4}$ ب) $3-\sqrt{2}$ پ) $2\pi-3$

پاسخ

گاهی لازم است مجموعه‌ای چون A، شامل تمام عددهای حقیقی بین دو عدد (برای نمونه بین -1 و 3) را نمایش دهیم. یعنی:

$$A=\{x \mid x\in \mathbb{R}, -1<x<3\}$$

نماد مختصر:

با استفاده از عددهای شروع و پایان، آن را با نماد $(-1,3)$ نمایش می‌دهیم. نام آن «**بازه**» است و چون شامل عددهای ابتدا و انتها نیست، به آن «**بازه‌ی باز**» گوئیم.

توجه کنید:

در صورتی که عددهای ابتدا و انتهای بازه جزء آن باشند، به جای پرانتز، به ترتیب از کروشه‌های] و [استفاده می‌شود.

برای نمونه؛

$$\{x \mid x\in \mathbb{R} , -۱\le x < ۳\} = [-۱,۳)$$

اکنون انواع بازه‌ها را به صورت کلی معرفی می‌کنیم:

بازه‌های اعداد:

اگر a و b دو عدد حقیقی و $a<b$ باشد، انواع بازه‌های عددی به صورت زیر نوشته شده و هر یک را می‌توان به عنوان مجموعه‌ای از نقاط روی محور نمایش داد:

۱) $\{x \mid x\in \mathbb{R} , a<x<b\}=(a,b)$ بازه‌ی باز

۲) $\{x \mid x\in \mathbb{R} , a\le x<b\}=[a,b)$ بازه‌ی نیم‌باز

۳) $\{x \mid x\in \mathbb{R} , a<x\le b\}=(a,b]$ بازه‌ی نیم‌باز

۴) $\{x \mid x\in \mathbb{R} , a\le x\le b\}=[a,b]$ بازه‌ی بسته

مثال: نامعادله‌ی $۱\ge -۲x+۳>-۴$ را حل کرده و مجموعه جواب آن را به صورت بازه و روی محور نمایش دهید.

پاسخ

مثال: هر کدام از عددهای قسمت (الف) در یکی از بازه‌های قسمت (ب) واقع است. آن‌ها را به هم مربوط کنید.

الف) $\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$ و -۲ و $\frac{۳}{۲}+\frac{۲}{۳}$

ب) $(-۳,-۱]$ و $(\frac{۵}{۳},\frac{۵}{۲})$ و $(-۲,۰]$

پاسخ

توجه کنید:

برای محاسبات روی بازه‌ها، مانند اجتماع، اشتراک و . . . ، بهتر است همه‌ی آن‌ها را روی یک محور نمایش داده و محاسبات مربوطه را به سادگی انجام داد. نمونه‌های بعد را ببینید:

مثال: حاصل عبارت زیر را به صورت یک بازه نشان دهید:

$$(-۱,۲]\cup(۲,۳]$$

پاسخ

با استفاده از محور پاسخ دهید:

ویژه دانش‌آموز

۱. اگر رابطه‌ی $[a,b]\cap[-۳,a+۲]=[-۲,a+۱]$ برای بازه‌ها برقرار باشد، حاصل‌ضرب a و b را بیابید.

جواب: ۲

برخی بازه‌ها، ابتدا یا انتها ندارند:

بازه‌های بی‌کران:

بازه‌هایی که از یک طرف یا از هر دو طرف بی‌کران هستند، نیز با استفاده از نماد بی‌نهایت ∞ به‌طریق مشابه تعریف می‌شوند:

۱) $\{x\in\mathbb{R}\mid x>a\}=(a,+\infty)$

۲) $\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq a\}=[a,+\infty)$

۳) $\{x\in\mathbb{R}\mid x<a\}=(-\infty,a)$

۴) $\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq a\}=(-\infty,a]$

۵) $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ مجموعه تمام اعداد روی محور حقیقی

توجه کنید:

هرگاه در سمتی از یک بازه نماد $+\infty$ یا $-\infty$ قرار گیرد، بازه‌ی نظیر آن به‌صورت پرانتز (باز) است. زیرا این دو نماد خودشان عضو هیچ بازه‌ای نیستند.

مثال: حاصل عبارت زیر را با رسم بازه‌ها روی محور به‌دست آورید.

$$[۲,۴)-(۳,+\infty)$$

پاسخ

مثال: هر مورد را بر حسب اجتماع مجموعه‌ها بنویسید.

① $\mathbb{R}-\{-۱\}$

② $[-۲,+\infty)-(-۲,۲]$

در صورت لزوم، با استفاده از محور پاسخ دهید:

ویژه دانش‌آموز

۲. اگر $A=\{x|\ x\in\mathbb{R}\ ,\ x<۲\}$ و $B=\{x|\ x\in\mathbb{R}\ ,\ x>-۳\}$، نقطه‌ی وسط بازه‌ی $A\cap B$ را مشخص کنید.

جواب: $-\frac{۱}{۲}$

مثال: (از کتاب) هر کدام از عددهای قسمت (الف) در یکی از بازه‌های قسمت (ب) واقع است. آن‌ها را به هم مربوط کنید.

الف) $۰/۲$ و $-\frac{۵}{۴}$ و -۵۰۰ و $۶/۲۲\times۱۰^{۲۳}$

ب) $(-\infty,-۴)$ و $[۳,+\infty)$ و $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}]$ و $(-۲,۳)$

پاسخ

در پایان این بخش، مجموعه‌ها را از جنبه‌ی دیگری به دو نوع تقسیم می‌کنیم:

متناهی یا نامتناهی:

مجموعه‌ها بر حسب تعداد عضوهایشان به دو نوع متناهی و نامتناهی تقسیم می‌شوند. بعلاوه؛ یک مجموعه فقط وقتی متناهی است که:

تعداد عضوهای آن مشخص و برابر عددی از مجموعه‌ی اعداد حسابی باشد.

برای نمونه؛

مجموعه‌ی $\{101,102,103,\dots,999\}$ متناهی و زیرمجموعه‌ی $\{\dots,-2,-1,0,1,2\}$ از $\mathbb{Z}$، نامتناهی است.

به موارد زیر نیز توجه داشته باشید:

- تعداد عضوهای مجموعه‌ی $\varnothing$ (مجموعه‌ی تهی) برابر صفر بوده و این مجموعه متناهی است.
- تمام مجموعه‌های استاندارد $\mathbb{N}$، W، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{Q}'$ و $\mathbb{R}$ نامتناهی هستند.
- بین هر دو عدد، بی‌شمار عدد حقیقی وجود دارد؛ پس تمام بازه‌ها نامتناهی هستند.

ولی:

بین هر دو عدد، فقط تعداد متناهی عدد طبیعی یا صحیح وجود دارد.

مثال: با بررسی اعضای مجموعه‌های زیر، متناهی یا نامتناهی بودن هر کدام را معلوم کنید.

الف) $A=\{(-1)^n \mid n\in\mathbb{N}\}$ ب) $B=\{2^n+(-2)^n \mid n\in\mathbb{N}\}$ پ) $C=\{\frac{|n|}{n^2}n \mid n\in\mathbb{N}\}$

پاسخ

ویژه دانش‌آموز

۳. با تعیین اعضای مجموعه‌ی زیر، مشخص کنید که آن متناهی است یا نامتناهی؟

$$A=\{x\in\mathbb{Z} : \frac{1}{x}\in\mathbb{Z}\}$$

جواب: ۲ عضو

مثال: مجموعه‌های A و B نامتناهی و مجموعه‌ی C متناهی است. متناهی یا نامتناهی بودن هر مورد را در صورت امکان معلوم کنید.

الف) $A \cup C$ ب) $B \cap C$ پ) $B - A$

پاسخ

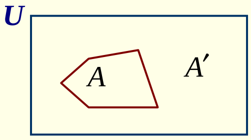
بخش ۲
مرجع و متمم

مفاهیم این بخش هنگام کاربرد مجموعه‌ها بسیار مفید واقع می‌شوند.

مرجع و متمم:

گاهی در هنگام کار با مجموعه‌ها، مجموعه‌ای با نماد U در نظر می‌گیریم که:

اعضای همه‌ی مجموعه‌های مورد بحث ما در آن قرار دارند.



به این مجموعه، مجموعه‌ی «**مرجع**» یا مجموعه‌ی «**جهانی**» گفته می‌شود:

بعلاوه:

اگر A یک زیرمجموعه از U باشد، مجموعه‌ی تمام اعضای خارج A را با A' نشان داده و به آن «**متمم**» A گوئیم. یعنی: $A' = U - A$

بنابراین:

هر مجموعه‌ی A، یک زیرمجموعه‌ی U است و بعلاوه، به نوعی می‌توان گفت A و A' مقابل (خلاف) یکدیگر هستند.

نمونه‌ای ساده از مرجع و متمم:

$$U = \{۰,۱,۲,۳,\dots,۹\} \ , \ B = \{۰,۲,۴,۶,۸\} \Rightarrow B' = \{۱,۳,۵,۷,۹\}$$

توجه کنید:

- همیشه $\varnothing' = U$ است، زیرا طبق تعریف بالا:

$$\varnothing' = U - \varnothing = U$$

- همیشه $U' = \varnothing$ است، زیرا:

$$U' = U - U = \varnothing$$

مثال: (مشابه کتاب) متمم مجموعه‌ی $A = \mathbb{N}$ را در دو حالت زیر مشخص کنید.

① اگر $U = W$ باشد.

② اگر $U = \mathbb{Z}$ باشد.

مثال: مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ را به عنوان مرجع گرفته و موارد زیر را انجام دهید:

الف) مجموعه‌ای نامتناهی مانند A مثال بزنید که A' نامتناهی باشد. آیا ممکن است A' متناهی شود؟

ب) مجموعه‌ای متناهی مانند B مثال بزنید که B' نامتناهی باشد. آیا ممکن است B' متناهی شود؟

پاسخ

مثال: فرض کنید $U=\{۱,۲,۳,\dots,۸\}$ مجموعه‌ی مرجع داده شده و $A=\{۲,۳,۷\}$ را در نظر بگیرید. به چند نمونه و نکات حاصل از آن توجه کنید:

① می‌خواهیم از A دو بار متمم بگیریم:

$$A'=U-A=\{۱,۲,\dots,۸\}-\{۲,۳,۷\}=\{۱,۴,۵,۶,۸\}$$

اکنون از مجموعه‌ی A' متمم می‌گیریم:

$$(A')'=U-A'=\{۱,۲,\dots,۸\}-\{۱,۴,۵,۶,۸\}=\{۲,۳,۷\}$$

نکته:

تساوی $(A')'=A$ که در این قسمت و البته در شکل قبل دیدیم، همواره برقرار است.

② اشتراک مجموعه‌ی A با متمم خود را ببینید:

$$A\cap A'=\{۲,۳,۷\}\cap\{۱,۴,۵,۶,۸\}=\varnothing$$

نکته:

رابطه‌ی $A\cap A'=\varnothing$ برای هر مجموعه‌ای درست است.

③ اجتماع مجموعه‌ی A را با متمم خود ببینید:

$$A\cup A'=\{۲,۳,۷\}\cup\{۱,۴,۵,۶,۸\}=\{۱,۲,\dots,۸\}=U$$

نکته:

رابطه‌ی $A\cup A'=U$ نیز برای هر مجموعه‌ای درست است.

مثال: اگر $A=[-۲,\infty)$ و $B=(-\infty,۰)$ و مرجع $\mathbb{R}$ باشد، حاصل هر مورد را بنویسید.

الف) $B-A'$ ب) $B'\cap A$ پ) $\varnothing-A'$

پاسخ

مثال: با نمودار ون نشان دهید:

اگر $A \subseteq B$ باشد، آنگاه خواهیم داشت: $B' \subseteq A'$.

پاسخ

برخی دیگر از خواص مجموعه‌ها را توسط نمونه‌هایی ببینید.

مثال: (از کتاب) فرض کنید $U=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ مجموعه‌ی مرجع، $A=\{۱,۲,۳\}$، $B=\{۲,۴\}$ و $C=\{۲,۳\}$ باشد. با دو بار متمم گیری از A، تساوی $(A')'=A$ که قبلاً دیدیم، این‌جا هم مشاهده می‌شود.

اکنون در هر مورد زیر، جاهای خالی را کامل کنید.

الف) $A'=\{\quad\}$ و $C'=\{\quad\}$

نتیجه:

در این نمونه، از $C \subseteq A$، رابطه‌ی .... بین متمم‌ها وجود دارد که همیشه برقرار است.

ب) $A \cup B=\{\quad\}$ و $(A \cup B)'=\{\quad\}$ و $A' \cap B'=\{\quad\}$

نتیجه:

تساوی .... که اینجا مشاهده می‌شود، همیشه برقرار است.

سؤال:

حدستان در مورد طرف دوم: .... $=(A \cap B)'$ چیست؟ آن را با محاسبه مانند بالا نشان دهید.

پ) $A-B=\{\quad\}$ و $A \cap B'=\{\quad\}$ و $A-(A \cap B)=\{\quad\}$

نتیجه:

تساوی‌های .... $=A-B$ و .... $=A-B$ که در این نمونه دیده می‌شود، همیشه برقرار هستند.

ویژه دانش‌آموز

۴. رابطه‌ی مهم زیر را با استفاده از نمودار ون نیز نشان دهید:

$$A-B=A \cap B'$$

در ادامه، به مباحثی در مورد تعداد اعضای مجموعه‌ها می‌پردازیم.

تعداد عضوها:

اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد، تعداد عضوهای آن را با $n(A)$ نشان می‌دهیم. برای نمونه؛

$$A=\{-۱,۰,۱,۳,۴\} \Rightarrow n(A)=۵$$

بعلاوه:

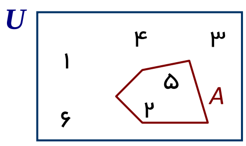
به چند رابطه‌ی مهم در مورد تعداد اعضای مجموعه‌ها توجه نمایید:

رابطه ۱:

چون A و A' خلاف (متمم) یکدیگر هستند، همواره:

$$n(A')=n(U)-n(A)$$

برای نمونه؛



در شکل مقابل مجموعه‌ی مرجع بـه صـورت $U=\{۱,۲,\dots,۶\}$ دارای ۶ عـضو است که ۲ تای آن‌ها در A و ۴ تای بقیه خارج A، یعنی در A' قرار دارند.

$$n(A')=n(U)-n(A)=۶-۲=۴$$

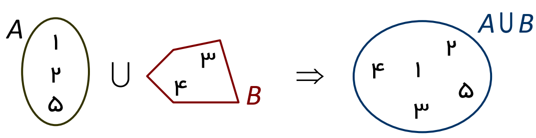
رابطه ۲:

اگر A و B دو مجموعه‌ی مجزا (یعنی جدا از هم: $A\cap B=\varnothing$) باشند، همواره:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

برای نمونه؛

در شکل زیر مجموعه‌ی A دارای ۳ عضو و مجموعه‌ی B دارای ۲ عضو است و هنگام اجتماع گرفتن، کـل ۵ عـضو در کنار یکدیگر قرار خواهند گرفت:



$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)=۳+۲=۵$$

رابطه ۳:

در صورتی که مجموعه‌های A و B اشتراک هم داشته باشند، رابطه‌ی زیر وجود دارد:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

زیرا:

تعداد عضوهای مشترک در محاسبه‌ی $n(A\cup B)$ فقط یکبار به حساب می‌آید، ولی در $n(A)+n(B)$ دو بار شمرده شده و باید یک‌بار هم کم شود.

مثال: در یک جمع ۱۱ نفره، ۹ نفر به چای و ۵ نفر به قهوه علاقه دارند. چند نفر به هر دوی این نوشیدنی‌ها علاقه دارند؟ (هر فرد لااقل به یک نوشیدنی علاقمند است.)

پاسخ

بسیاری وقت‌ها، نمایش تعداد عضوها در نمودار ون، حل مسأله را آسان‌تر می‌کند.

مثال: (از کتاب) یک دوره جشنواره فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آن‌ها ۷ فیلم پویانمایی (کارتونی) و ۸ فیلم طنز وجود دارد به طوری که، ۳ تا از فیلم‌های پویانمایی با مضمون طنز می‌باشند. مطلوب است تعداد کل فیلم‌هایی که:

الف) پویانمایی یا طنزند.

ب) غیرپویانمایی و غیر طنزند.

پاسخ

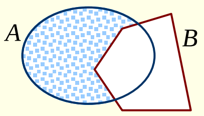
0916 992 5753
farhad.shabani66

تعداد عضوهایی که فقط در یکی از دو مجموعه قرار دارند:

رابطه ۴:

رابطه‌ی زیر تعداد عضوهایی را نشان می‌دهد که فقط در A قرار دارند:

$$n(A-B)=n(A)-n(A\bigcap B)$$



زیرا:

در محاسبه‌ی $A-B$، فقط عضوهای مشترک از A برداشته می‌شوند.

مثال: کلاسی ۳۲ دانش‌آموز دارد. اگر ۱۳ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۴ نفر عضو تیم والیبال این کلاس باشند و ۱۰ نفر هم عضو هیچ تیمی نباشند:

الف) چند نفر هم در تیم فوتبال و هم در تیم والیبال عضو هستند؟

ب) چند نفر فقط عضو تیم فوتبال هستند؟

پ) چند نفر فقط عضو تیم والیبال هستند؟

پاسخ

حالتی بسیار مهم:

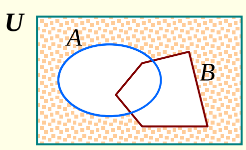
رابطه ۵:

وقتی A و B دو مجموعه هستند.

عضوهایی که در هیچ‌یک از آن دو قرار ندارند: ($A'\bigcap B'$)، همان $(A\bigcup B)'$ است.

بنابراین تعداد چنین عضوهایی برابر است با:

$$n(U)-n(A\bigcup B)=n(U)-[n(A)+n(B)-n(A\bigcap B)]$$



توجه کنید:

بیان دیگری از این مجموعه چنین است: «اعضایی که نه در A باشند و نه در B »

مثال: در یک کلاس با ۳۳ دانش‌آموز، ۲۱ نفر در درس ریاضی و ۲۶ نفر در شیمی قبول شده و ۱۸ نفر در هر دو درس قبول شده‌اند. چند نفر در هر دو درس مردود شده‌اند؟

پاسخ

مثال: (از کتاب) فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌هایی از مجموعه‌ی مرجع U باشند به طوری‌که $n(U)=100$، $n(A)=60$، $n(B)=40$ و $n(A\cap B)=20$. مطلوب است:

الف) $n(A'\cap B)$ 　　　ب) $n(A'\cap B')$

پاسخ

مانند نمونه‌ها پاسخ دهید:

ویژه دانش‌آموز

۵. از ۶۵ نفر دانش‌آموز پایه‌ی دهم یک مدرسه، ۵۱ نفر به درس ریاضی، ۴۲ نفر به درس هندسه و ۳۳ نفر به هر دو درس علاقمند هستند. مشخص کنید:

الف) چند نفر لااقل به یکی از دو درس علاقمند هستند؟

ب) چند نفر فقط به درس هندسه علاقمند هستند؟

ج) چند نفر دقیقاً به یک درس از دو درس علاقمند هستند؟

د) چند نفر به هیچ کدام از دو درس علاقه‌ای ندارند؟

جواب: به ترتیب ۶۰، ۹، ۲۷ و ۵

بخش ۳
الگو و دنباله

به رشته عددهای زیر نگاه کنید:

$$۲ , ۴ , ۶ , ۸ , ۱۰ , ...$$

در این رشته، اولین عدد برابر ۲، دومین عدد برابر ۴، سومین عدد ۶ و . . . است. آن‌چه اهمیت زیادی دارد، این است که بتوانیم مشخص کنیم:

بین اعداد این رشته و شماره‌ی مکان آن‌ها چه ارتباطی وجود دارد؟

جواب:

اگر اعداد این رشته را به صورت $۲\times۱ , ۲\times۲ , ۲\times۳ , ۲\times۴ , ۲\times۵ , ...$ در نظر بگیریم، اولین عدد ۲×۱، دومین عدد ۲×۲ و . . . است و بنابراین می‌توان گفت:

عدد بیستم در رشته اعداد بالا برابر $۲\times۲۰=۴۰$ و عدد سی و هفتم در این رشته $۲\times۳۷=۷۴$ است.

در کل:

اگر یک شماره‌ی دلخواه از رشته را با n نشان دهیم، مقدار جمله‌ی مربوطه برابر $۲\times n$ است.

نتیجه:

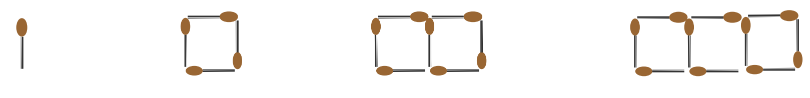
جملات رشته اعداد بالا از الگوی $t_n=۲\times n$ بدست می‌آیند.

توجه:

در بررسی الگوها، عدد n شماره‌ی رشته اعداد و نمادی چون t_n یا a_n یا . . . نمایش دهنده‌ی خود رشته اعداد است که به آن **«جمله‌ی عمومی»** الگو گفته می‌شود. (به عددهای t_1، t_2، t_3 و . . . جملات آن رشته گفته می‌شود.)

نمونه‌ی دیگری ببینید:

مثال: تعداد چوب کبریت‌ها در شکل‌های دهم و nاُم را مشخص کنید.



پاسخ