

به نام خدا

ریاضی یازدهم انسانی

مؤلف:

فرهاد شعبانی

انتشارات ارسطو

(سازمان چاپ و نشر ایران - ۱۴۰۲)

نسخه الکترونیکی این اثر در سایت سازمان چاپ و نشر ایران و اپلیکیشن کتاب رسان موجود می باشد

chaponashr.ir

سرشناسه: شعبانی، فرهاد، ۱۳۶۶

عنوان و نام پدیدآور: ریاضی یازدهم انسانی / مولف فرهاد شعبانی.

مشخصات نشر: ارسطو (سامانه اطلاع رسانی چاپ و نشر ایران)، ۱۴۰۲.

مشخصات ظاهری: ۱۵۴ ص.

شابک: ۹۷۸-۶۲۲-۳۳۹-۱۵۹-۰

وضعیت فهرست نویسی: فیبا

موضوع: آموزش ریاضی

رده بندی کنگره: HD۶۲/۶

رده بندی دیویی: ۶۵۸/۱۶

شماره کتابشناسی ملی: ۹۱۸۱۸۲۶

اطلاعات رکورد کتابشناسی: فیبا

نام کتاب: ریاضی یازدهم انسانی

مولف: فرهاد شعبانی

ناشر: ارسطو (سامانه اطلاع رسانی چاپ و نشر ایران)

صفحه آرای، تنظیم و طرح جلد: پروانه مهاجر

تیراژ: ۱۰۰۰ جلد

نوبت چاپ: اول - ۱۴۰۲

چاپ: زیرجد

قیمت: ۱۲۴۰۰۰ تومان

فروش نسخه الکترونیکی - کتاب رسان:

<https://chaponashr.ir/ketabresan>

شابک: ۹۷۸-۶۲۲-۳۳۹-۱۵۹-۰

تلفن مرکز پخش: ۰۹۱۲۰۲۳۹۲۵۵

www.chaponashr.ir



انتشارات ارسطو



چاپ و نشر ایران
Chaponashr.ir

فهرست کامل

۱

گزاره‌های ساده و مرکب

۲

معرفی گزاره و درستی یا نادرستی، گزاره‌های ساده و مرکب، روش رسم جدول درستی گزاره و بررسی حالات درستی آن
+ بخش ویژه کنکور، تمرینات تشریحی و تست

۲

هم‌ارزی و استدلال

۲۶

معرفی گزاره‌های هم‌ارز، بررسی هم‌ارزی توسط جدول و بدون جدول، استدلال و استنتاج
+ بخش ویژه کنکور، تمرینات تشریحی و تست

۳

تابع (۱)

۵۳

یادآوری مفهوم تابع، معرفی و بررسی چند نوع از توابع ساده و نمودار آن‌ها، تابع قدرمطلق و نمودار آن
+ بخش ویژه کنکور، تمرینات تشریحی و تست

۴

تابع (۲)

۸۷

توابع پلکانی و نمودارهای مربوطه، معرفی تابع جزءصحیح و نمودار آن، اعمال جبری بین توابع
+ بخش ویژه کنکور، تمرینات تشریحی و تست

۵

آمار

۱۲۰

بررسی شاخص‌های آماری (خط فقر، شاخص بهای کالا، تورم، بیکاری و ...)، سری‌های زمانی، نمودار، برون‌یابی و درون‌یابی
+ بخش ویژه کنکور، تمرینات تشریحی و تست



گزاره‌های ساده و مرکب

| صفحه | فهرست مطالب |
|------|------------------------------------|
| ۳ | ▪ مفاهیم مقدماتی |
| ۶ | ▪ ترکیب گزاره‌ها |
| ۱۴ | ▪ ویژه کنکور |
| ۲۰ | ▪ تمرینات تشریحی و منتخب کتاب درسی |
| ۲۲ | ▪ تمرین تست |

هدف این مبحث، آشنایی با منطق (ریاضی) و کاربرد آن است؛ می‌توان گفت:

کاربرد منطق در تشخیص اعتبار استدلال‌ها، درست اندیشیدن و در نتیجه درست نتیجه‌گیری کردن است.

بویژه، منطق ریاضی، بیان مفاهیم و کاربرد منطق به زبان و نماد ریاضی است. در این بخش، مفاهیم مقدماتی بیان و بررسی می‌گردد. موضوع محوری:

گزاره:

یک جمله خبری که دارای ارزش «درست» یا «نادرست» باشد را «گزاره» گویند و آن را معمولاً با یکی از حروف p ، q ، r و ... نام گذاری می‌کنند.

توجه کنید:

- گزاره باید حتماً خبر بوده و درستی یا نادرستی آن در حال یا آینده قابل تعیین باشد. (ممکن است تعیین درست یا نادرست بودن یک خبر نیاز به زمان داشته و در این زمان ممکن نباشد).
 - گزاره‌ای که تنها از یک خبر تشکیل شده، «گزاره‌ی ساده» می‌نامیم. (بررسی سایر گزاره‌ها کمی پیش‌تر).
 - ارزش گزاره دقیقاً یکی از دو حالت زیر است:
- درست: د نادرست: ن

بنابراین:

جملات از انواع زیر، گزاره محسوب نمی‌شوند:

- جملاتی که در آن‌ها خبری وجود ندارد؛ مانند جملات عاطفی، سؤالی، امری و ...
- جملاتی که درست یا نادرست بودن آن‌ها به نظر یا سلیقه‌ی اشخاص مختلف بستگی دارد.

توجه: افلاطون فیلسوف بزرگ یونانی است. سقراط استاد و ارسطو شاگرد افلاطون بوده است!

مثال: (از کتاب)

گزاره‌ها و ارزش هر کدام را تعیین کنید.

- | | |
|--|--|
| (الف) شما چند سال دارید؟ | (ب) عدد ۲ عددی اول است. |
| (پ) عدد $\sqrt{2}$ عددی گویا است. | (ت) افلاطون شاگرد ارسطو است. |
| (ث) $2 + 3 \times 4 = 20$ | (ج) عدد $(-1)^n$ برای $n \in \mathbb{N}$ همواره عددی مثبت است. |
| (چ) سیب قرمز از سیب زرد خوشمزه‌تر است. | (ح) لطفاً تخته را پاک کن. |

پاسخ

موارد (الف؛ سؤالی) و (ح؛ امری) و (ج؛ تعیین درست یا نادرست سلیقه‌ای است)، گزاره نیستند. سایر موارد گزاره هستند.

(ب) درست است. (پ) نادرست است. (ت) نادرست است.

(ث) نادرست است؛ زیرا در محاسبه باید اولویت‌ها رعایت شود: $۲ + ۳ \times ۴ = ۲ + ۱۲ = ۱۴$

(ج) نادرست است، برای n فرد، $(-1)^n = -1$ عددی منفی است.



مثال: گزاره‌ها و ارزش هر کدام را تعیین کنید.

(الف) ریاضی یازدهم از ریاضی سال قبل آسان‌تر است.

(ب) تساوی $\sqrt{۹} + \sqrt{۱۶} = \sqrt{۲۵}$ برقرار است.

(پ) آیا $\sqrt{۲}$ عددی گنگ است.

پاسخ

مورد اول خیر است، ولی چون تعیین درستی آن ممکن نیست، گزاره محسوب نمی‌شود. مورد دوم یک گزاره با ارزش «ن» است؛ زیرا:

$$\sqrt{۹} + \sqrt{۱۶} = ۳ + ۴ = ۷ \neq \sqrt{۲۵} = ۵$$

مورد سوم سؤالی است و گزاره محسوب نمی‌شود.



مثال: عبارت: «حاصل عبارت $(۱ \times ۲ \times ۳ \times \dots \times ۱۰۰) + ۱$ عددی اول است.» یک گزاره است. هر چند الان نمی‌دانیم ارزش

آن درست یا نادرست است، ولی با بررسی در آینده قابل تعیین ارزش درستی است.



جدول ارزش:

تمام حالت‌های گوناگون ارزش یک گزاره را می‌توان در یک جدول نمایش داد. وقتی فقط با یک گزاره‌ی ساده p روبرو هستیم، جدول دو حالتی به صورت روبرو است:

| |
|---|
| p |
| د |
| ن |

(کاربرد اصلی جدول، در بررسی درستی یا نادرستی گزاره‌های مرکب است که در ادامه فواید دید.)

برعکس کردن خیر موجود در گزاره‌ها به صورت زیر است:

نقیض گزاره:

نقیض یک گزاره‌ی p را با نماد $\sim p$ نوشته و آن را «نقیض p » یا «چنین نیست که p » می‌خوانیم.

در کل:

چنان‌که در جدول ارزش مقابل دیده می‌شود:

ارزش درستی $\sim p$ دقیقاً برعکس ارزش درستی p است.

| | |
|---|----------|
| p | $\sim p$ |
| د | ن |
| ن | د |

✨ **مثال:** نقیض گزاره‌ی « ۴ عددی فرد است. » را به همهی روش‌های زیر می‌توان بیان کرد:

- چنین نیست که ۴ عددی فرد است.
- ۴ عددی فرد نیست.
- ۴ عددی زوج است. (چون زوج و فرد بودن دقیقاً نقطه‌ی مقابل هم هستند).



مورد بعد را با دقت بخوانید:

✨ **مثال:** نقیض گزاره‌ی « ۱ عددی مثبت است. » به صورت « ۱ عددی منفی است. » صحیح نیست. باید:

فلاف فیر را بیان کنید!

می‌دانیم:

خلاف مثبت بودن عدد این است که آن عدد برابر صفر یا منفی باشد. پس نقیض به همهی صورت‌های زیر درست است:

- چنین نیست که ۱ عددی مثبت است.
- ۱ عددی مثبت نیست.
- ۱ عددی منفی یا صفر است.

به بیان نمادین:

نقیض گزاره‌ی « $0 < 1$ » به صورت « $1 < 0$ » ناصحیح، ولی به هر دو صورت « $0 > 1$ » و « $1 \leq 0$ » صحیح است.



✨ **مثال:** (از کتاب)

در هر یک از حالت‌های زیر، نقیض گزاره را بیان کرده و سپس، ارزش هر یک را مشخص کنید.

الف) عدد ۱۲ از ۱۵ کوچک‌تر است. (ب) تساوی $2 \times 2 = 4$ برقرار است.

پ) عدد ۵ زوج است. (ت) ارسطو شاگرد افلاطون است.

ث) ایران در منطقه‌ی غرب آسیا قرار دارد. (ج) $(3 \times 7) > (5 \times 4)$

پاسخ ✓

الف) عدد ۱۲ از ۱۵ کوچک‌تر نیست. (نادرست)

پ) عدد ۵ زوج نیست. (درست)

ث) ایران در منطقه‌ی غرب آسیا قرار ندارد. (نادرست)

ب) تساوی $2 \times 2 = 4$ برقرار نیست. (نادرست)

ت) ارسطو شاگرد افلاطون نیست. (نادرست)

ج) $(3 \times 7) \leq (5 \times 4)$ (درست)



از یک یا چند گزاره می‌توان با روش‌هایی که در این بخش می‌بینیم، گزاره‌های جدید ساخت. توجه کنید:

گزاره‌ای که از دو یا چند خبر تشکیل شده باشد، «گزاره‌ی مرکب» نامیده می‌شود.

در این بخش، چهار روش برای ترکیب گزاره‌ها آورده خواهد شد. توجه داشته باشید که: ارزش هر گزاره‌ی مرکب، به ارزش گزاره‌های ساده‌ی تشکیل دهنده‌ی آن بستگی دارد.

اولین روش ترکیب گزاره‌ها:

ترکیب عطفی:

وقتی بین دو گزاره‌ی p و q حرف ربط «و» قرار گیرد، گزاره‌ی حاصل به صورت: $p \wedge q$ نوشته شده و به صورت « p و q » خوانده می‌شود. این نوع ترکیب را «ترکیب عطفی» و نماد \wedge را «عاطف» گویند.

بعلاوه:

قابل درک است که ترکیب عطفی فقط وقتی درست است که هر دوی p و q درست باشند و در غیر این صورت همواره نادرست است.

| p | q | $p \wedge q$ |
|---|---|--------------|
| د | د | د |
| د | ن | ن |
| ن | د | ن |
| ن | ن | ن |

ارزش درستی $p \wedge q$ را در جدول می‌بینید:

برای نمونه:

برای درست بودن عبارت: «عدد ۲ زوج است و $\sqrt{2}$ عددی گویا است.»

باید هر دو گزاره‌ی ساده‌ی «عدد ۲ زوج است» و « $\sqrt{2}$ عددی گویا است» درست باشند. ولی چون گزاره‌ی دوم نادرست است، گزاره‌ی مرکب در کل نادرست است.

مثال: الف) ارزش گزاره‌ی «هر ماه سال ۳۰ روز دارد و هر قرن ۱۰۰ سال است.» را مشخص کنید.

ب) جای خالی در عبارت «۵۳ عددی اول است و» را با یک گزاره طوری کامل کنید که گزاره‌ی مرکب درست شود.

پ) جای خالی در عبارت «قرآن مجید ۳۰ سوره دارد و» را با یک گزاره طوری کامل کنید که گزاره‌ی عطفی حاصل نادرست شود.

پاسخ

الف) چون ماه کمتر یا بیشتر از ۳۰ روز هم داریم، گزاره‌ی «هر ماه سال ۳۰ روز دارد» (د \wedge ن) بوده و نادرست است.

ب) ۵۳ عدد اول است، پس اگر گزاره‌ی دوم نیز درست باشد، کل گزاره درست است. مثلاً:

عدد $\sqrt{2}$ گنگ است.

پ) چون گزاره‌ی «قرآن مجید ۳۰ سوره دارد.» نادرست است، گزاره‌ی دوم هر ارزشی داشته باشد، کل گزاره نادرست است. مثلاً:
افلاطون شاگرد ارسطو است. (ن) یا ارسطو شاگرد افلاطون است. (د)



توجه:

- هنگام تشکیل جدول ارزش گزاره‌های مرکب، موارد زیر را رعایت کنید:
- به تعداد گزاره‌های ساده‌ی p ، q ، r و ... که آن گزاره‌ی مرکب را تشکیل داده اند، توجه کنید: چون هر گزاره‌ی ساده دو حالت «د» و «ن» دارد،
 - وقتی فقط یک گزاره داریم، تعداد ۲ حالت (دو سطر) در جدول قرار می‌گیرد.
- مانند:

| p | p | $p \wedge p$ |
|---|---|--------------|
| د | د | د |
| ن | ن | ن |

جدول ارزش گزاره‌ی $p \wedge p$

- وقتی دو گزاره p و q داریم، $2 \times 2 = 2^2 = 4$ سطر خواهیم داشت؛ مانند جدول ارزش $p \wedge q$ که بالاتر دیدیم.
 - برای سه گزاره، $2^3 = 8$ حالت و در کل وقتی n گزاره‌ی ساده در گزاره‌ی مرکب موجود باشد، 2^n حالت داریم.
- برای این که جدول منظم تشکیل شود:

| p | q | r |
|---|---|---|
| د | د | د |
| د | د | ن |
| د | ن | د |
| د | ن | ن |
| ن | د | د |
| ن | د | ن |
| ن | ن | د |
| ن | ن | ن |

- در ستون اول، نصف حالت‌ها «د» و نصف دیگر حالت‌ها «ن» قرار می‌گیرد.
 - در ستون‌های بعدی تعداد دوباره نصف می‌شود تا آخر.
- مثلاً برای سه گزاره:

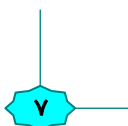
در کل ۸ حالت داریم و شروع جدول همیشه به صورت روبرو است:

| p | $\sim p$ | $p \wedge \sim p$ |
|---|----------|-------------------|
| د | ن | ن |
| ن | د | ن |

مثال: جدول ارزش درستی گزاره‌ی $p \wedge \sim p$ را ببینید:

توجه کنید:

چنان که می‌بینید، یک گزاره و نقیض آن هیچ‌گاه نمی‌توانند هر دو درست باشند! (یعنی: **تناقض**)



روش بعدی در ترکیب گزاره‌ها:

ترکیب فصلی:

وقتی بین دو گزاره‌ی p و q رابط «یا» قرار گیرد، گزاره‌ی حاصل به صورت: $p \vee q$ نوشته شده و به صورت « p یا q » خوانده می‌شود. این نوع ترکیب را «ترکیب فصلی» و نماد \vee را «فاصل» گویند.

بعلاوه:

قابل فهم است که ترکیب فصلی فقط وقتی نادرست است که هر دوی p و q نادرست باشند و در غیر این صورت همواره درست است.

| p | q | $p \vee q$ |
|---|---|------------|
| د | د | د |
| د | ن | د |
| ن | د | د |
| ن | ن | ن |

مثال: به گزاره‌ی زیر توجه کنید:

۲ عددی فرد است یا ۹ عددی اول است.

این گزاره نادرست است، زیرا هر دو گزاره‌ی «۲ عددی فرد است» و «۹ عددی اول است» نادرست هستند.

----- ❄ -----

مثال: جای خالی در عبارت «۱۹ عددی اول است یا» را با یک گزاره طوری کامل کنید که گزاره‌ی مرکب درست باشد.

پاسخ

چون گزاره‌ی «۱۹ عددی اول است.» درست است، گزاره‌ی دوم هر ارزشی داشته باشد، کل گزاره درست است. مثلاً:

قرآن کریم ۱۱۴ آیه دارد. (ن) یا قرآن کریم ۱۱۴ سوره دارد. (د)

----- ❄ -----

مثال: جدول ارزش گزاره‌ی $p \vee \sim q$ را تشکیل دهید. این گزاره در چه صورتی نادرست است؟

پاسخ

چون دو گزاره‌ی ساده‌ی p و q مشاهده می‌شوند، $۲^۲ = ۴$ حالت برای جدول تشکیل می‌دهیم.

توجه کنید:

مانند محاسبات ریاضی، از ساده‌ترین گزاره‌ها شروع کرده و در پایان کل گزاره تشکیل می‌شود:

| p | q | $\sim q$ | $p \vee \sim q$ |
|---|---|----------|-----------------|
| د | د | ن | د |
| د | ن | د | د |
| ن | د | ن | ن |
| ن | ن | د | د |

شروع: p

بعد: q

بعد: $\sim q$

پایان: $p \vee \sim q$

می‌بینید که:

گزاره‌ی $p \vee \sim q$ وقتی نادرست است که p نادرست و q درست باشد.



مثال: جدول ارزش درستی گزاره‌ی: $p \vee (q \wedge r)$ را ببینید:

| p | q | r | $q \wedge r$ | $p \vee (q \wedge r)$ |
|---|---|---|--------------|-----------------------|
| د | د | د | د | د |
| د | د | ن | ن | د |
| د | ن | د | ن | د |
| د | ن | ن | ن | د |
| ن | د | د | د | د |
| ن | د | ن | ن | ن |
| ن | ن | د | ن | ن |
| ن | ن | ن | ن | ن |

توجه کنید:

- چون سه گزاره‌ی ساده وجود دارد، $2^3 = 8$ حالت در جدول داریم.
- ابتدا سه گزاره‌ی ساده را قرار داده، سپس $q \wedge r$ و در آخر گزاره‌ی مرکب اصلی تعیین ارزش شده است.

پنان‌که می‌بینید:

در تشکیل جدول، از جزء به کل حرکت می‌کنیم.



ترکیب شرطی:

با داشتن دو گزاره‌ی p و q، گزاره‌ی شرطی به صورت:

$p \Rightarrow q$ نوشته شده و به صورت «اگر p، آنگاه q» خوانده می‌شود.

این نوع ترکیب را «ترکیب شرطی» گویند.

در این ترکیب، به p «مقدم» و به q «تالی» یا «پیرو» نیز گفته می‌شود.

بعلاوه:

مطابق جدول زیر، ترکیب شرطی فقط وقتی نادرست است که p درست، ولی q نادرست باشد. به عبارت دیگر:

هنگامی یک استنتاج $p \Rightarrow q$ صحیح است که:

درست بودن p، حتماً درستی q را نتیجه دهد.

| p | q | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|-------------------|
| د | د | د |
| د | ن | ن |
| ن | د | د |
| ن | ن | د |

مثال: اگر p و q هر دو گزاره‌هایی نادرست باشند، ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

الف) $p \Rightarrow \sim p$ ب) $(p \vee \sim q) \Rightarrow q$

پاسخ ✓

الف) گزاره به صورت (د \Rightarrow ن) بوده و طبق جدول درست است.

ب) چون $(p \vee \sim q)$ به صورت (د \vee ن) بوده و درست است، گزاره‌ی شرطی به صورت (ن \Rightarrow د) بوده و نادرست خواهد بود.



حالت بسیار مهمی از ترکیب شرطی:

قانون انتقای مقدم:

چنان‌که در جدول ارزش $p \Rightarrow q$ می‌بینید:

اگر p نادرست باشد، بدون توجه به ارزش q ، ارزش گزاره‌ی $p \Rightarrow q$ درست است!

این خاصیت را «قانون انتقای مقدم» گویند.

یعنی:

اگر با یک فرض غلط، هر نتیجه‌ی درست یا نادرست را بپذیرید، استنتاج شما در کل صحیح بوده است.
برای نمونه:

استنتاج‌های زیر هر دو درستند:

- اگر $۲ -$ عددی مثبت باشد، آنگاه تمام داوطلبان کنکور ۱۴۰۲ رتبه‌ی یک خواهند شد.
- اگر اصفهان مرکز استان فارس باشد، آنگاه ایران یک کشور اروپایی است.

مثال: الف) ارزش گزاره‌ی «اگر عدد ۳۰ زوج است، آنگاه هر دهه ۱۰۰ سال است.» را مشخص کنید.

ب) جاهای خالی در عبارت «اگر آنگاه» را با دو گزاره طوری کامل کنید که گزاره‌ی مرکب درست شود.

پ) جای خالی در عبارت «اگر آنگاه قرآن مجید ۱۱۴ آیه دارد.» را با یک گزاره طوری کامل کنید که گزاره‌ی حاصل نادرست شود.

پاسخ ✓

الف) چون هر دو گزاره صحیح هستند، گزاره‌ی مرکب به صورت (د \Rightarrow د) بوده و درست است.

ب) کافی است فقط حالت (ن \Rightarrow د) رخ ندهد. مثلاً:

اگر عدد $\sqrt{۲}$ گنگ است، آنگاه ۱۱ عددی اول است.

پ) چون گزاره‌ی «قرآن مجید ۱۱۴ آیه دارد.» نادرست است، گزاره‌ی اول باید الزاماً درست باشد، تا کل گزاره نادرست شود. مثلاً:

افلاطون شاگرد سقراط است. (د)



مثال: (از کتاب)

اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

الف) $(p \Rightarrow q) \wedge r$ ب) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

پ) $(r \Rightarrow p) \vee q$ ت) $(q \Rightarrow p) \wedge r$

پاسخ ✓

الف) چون $(p \Rightarrow q)$ به صورت (ن \Rightarrow د) بوده و نادرست است، ارزش r هر چه باشد، ترکیب عطفی نادرست است.

ب) چون $(p \Rightarrow q)$ نادرست است، ارزش r هر چه باشد، ترکیب شرطی $(r \Rightarrow \text{ن})$ به انتغای مقدم درست است.

پ) چون $(r \Rightarrow p)$ به صورت (د \Rightarrow د) است، الزاماً درست است، ترکیب فصلی به صورت (ن \vee د) بوده و درست است.

ت) چون $(q \Rightarrow p)$ به صورت (د \Rightarrow ن) بوده و درست است، ترکیب عطفی به صورت (د \wedge د) است، اکنون توجه کنید:

اگر r درست باشد، ترکیب عطفی درست و اگر r نادرست باشد، ترکیب عطفی نیز نادرست است. در نتیجه:

ارزش کل گزاره با ارزش r یکسان است.



مثال: اگر ارزش گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \Rightarrow q$ هر دو درست باشد، ارزش گزاره‌ی $(\sim p \wedge q) \vee \sim q$ را تعیین کنید.

پاسخ ✓

به اجبار باید q درست باشد، چون در غیر این صورت، حتماً یکی از دو گزاره‌ی شرطی $p \Rightarrow q$ یا $\sim p \Rightarrow q$ نادرست می‌شود. پس

$\sim q$ نادرست بوده و $(\sim p \wedge q) \vee \sim q$ هم‌ارزش با $\sim p \wedge q$ است. با توجه به درست بودن q ؛

اگر p درست باشد، گزاره‌ی مرکب نادرست و اگر p نادرست باشد، گزاره‌ی مرکب درست است.

نتیجه:

گزاره‌ی $(\sim p \wedge q) \vee \sim q$ هم‌ارزش با $\sim p$ است.



ترکیب دوشروطی:

با داشتن دو گزاره‌ی p و q ، گزاره‌ی دوشروطی به صورت:

$p \Leftrightarrow q$ نوشته شده و به صورت « p اگر و تنها اگر q » یا «اگر p آنگاه q و برعکس» خوانده می‌شود.

در واقع:

هر دوی p و q باید یکدیگر را نتیجه دهند تا این ترکیب، گزاره‌ای درست باشد.

بنابراین:

همان‌طور که در جدول زیر هم می‌بینید، ترکیب دو شرطی وقتی نادرست است که یکی از p یا q دیگری را نتیجه ندهد.

| p | q | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|-----------------------|
| د | د | د |
| د | ن | ن |
| ن | د | ن |
| ن | ن | د |

مثال: ارزش درستی هر گزاره را مشخص کنید.

الف) اگر ۲ فرد باشد، آنگاه ۳ اول است.

ب) ۲ فرد است اگر و فقط اگر ۳ اول باشد.

پاسخ ✓

با توجه به ارزش هر کدام از گزاره‌های ساده:

الف) گزاره‌ی شرطی به صورت (د \Rightarrow ن) بوده و درست است.

ب) گزاره‌ی دو شرطی به صورت (د \Leftrightarrow ن) بوده و طبق قاعده‌ی مربوطه نادرست است.



مثال: توسط جدول نشان دهید:

ارزش گزاره‌ی $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ دقیقاً یکسان با ارزش گزاره‌ی $p \Leftrightarrow q$ است.

پاسخ ✓

جدول ارزش گزاره را تشکیل می‌دهیم:

| p | q | $p \Rightarrow q$ | $q \Rightarrow p$ | $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ |
|---|---|-------------------|-------------------|--|
| د | د | د | د | د |
| د | ن | ن | د | ن |
| ن | د | د | ن | ن |
| ن | ن | د | د | د |

می‌بینید که ستون آخر هر دو گزاره‌ی $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ و $p \Leftrightarrow q$ یکسان است.



مثال: (از کتاب)

اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

الف) $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

ب) $(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$

پ) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$

ت) $(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q)$

پاسخ ✓

الف) به صورت (ن \vee ن) و نادرست و $(p \Rightarrow q)$ به صورت (ن \Rightarrow د) و نادرست است، ترکیب دو شرطی به صورت

(ن \Leftrightarrow ن) بوده و درست است.

ب) به صورت (ن \vee ن) و درست و $(p \vee q)$ درست و نقیض آن نادرست است، ترکیب دو شرطی به صورت (ن \Leftrightarrow د) بوده

و نادرست است.

پ) مشابه موارد قبل، ترکیب دو شرطی به صورت $(د \Leftrightarrow ن)$ بوده و نادرست است.
ت) چون p درست است، اگر r درست باشد، ترکیب دو شرطی درست و اگر r نادرست باشد، ترکیب دو شرطی نادرست است. پس ترکیب شرطی به صورت $(ن \Rightarrow r)$ است و؛

ارزش کل گزاره خلاف ارزش r است. (یعنی: هم‌ارزش با $r \sim$ است.)



ویژه آمادگی کنکور

در بخش پایانی، مطالب لازم جهت آمادگی کامل برای شرکت در آزمون‌های آزمایشی و کنکور آورده می‌شوند.



اگر در حال مطالعه برای تسلط بر کتاب و شرکت در امتحان مدرسه هستید،

می‌توانید فعلاً از خواندن این بخش صرف‌نظر کنید!

در ابتدا، گزاره‌ها را با دقت و نمونه تست‌های بیشتری بررسی می‌کنیم.

❓ کدام مورد گزاره محسوب می‌شود؟

- 1 ای کاش در کنکور قبول شوم.
- 2 چه هوای خوبی.
- 3 در پرتاب تاس، احتمال ظاهر شدن 6، برابر پنجاه درصد است.
- 4 پنجره را باز کن.

✔ گزینه ۳

فقط در مورد سوم یک جمله‌ی خبری داریم که درستی یا نادرستی آن قابل بررسی است.



❓ نقیض کدام گزاره صحیح نوشته شده است؟

- 1 $\sqrt{2}$ عددی گنگ است. **نقیض:** « $\sqrt{2}$ عددی صحیح است.»
- 2 $4^3 - 4^2 = 4$ **نقیض:** « $4^3 - 4^2 > 4$ »
- 3 مهدی اخوان ثالث نویسنده‌ی کتاب ارغنون است. **نقیض:** «مهدی اخوان ثالث نویسنده‌ی کتاب ارغنون نیست.»
- 4 ایران در منطقه‌ی شرق آسیا قرار دارد. **نقیض:** «ایران در منطقه‌ی غرب آسیا قرار دارد.»

✔ گزینه ۳

نقیض در گزینه ۱: « $\sqrt{2}$ عددی گنگ نیست.»
 نقیض در گزینه ۲: « $4^3 - 4^2 \neq 4$ »
 نقیض در گزینه ۴: «ایران در منطقه‌ی شرق آسیا قرار ندارد.»

توجه: نویسنده‌ی ارغنون (Organon) ارسطو شاگرد افلاطون است.



در تشخیص گزاره بودن یا نبودن جملات:

نکته ۱

در دو حالت زیر، جمله‌ی خبری گزاره محسوب نمی‌شود:

- اگر تعیین درستی یا نادرستی آن وابسته به نظر شخصی یا سلیقه‌ی افراد باشد.
نمونه:
بهار، زیباترین فصل سال است.
- اگر تعیین درستی یا نادرستی آن ممکن نباشد.
نمونه:
درس ریاضی از درس عربی دشوارتر است.

❖ چه تعداد از جملات زیر گزاره است؟

- (الف) عدد $\sqrt{7}$ عددی گویا است.
(ب) محصولات ایرانی از محصولات چینی کیفیت بهتری دارند.
(پ) به به، امروز چه هوای خوبی است!
(ت) جرم یک دانه‌ی ارزن ناچیز است.
(ث) کامپیوتر را خاموش کنید.
(ج) گرم‌ترین نقطه‌ی کره‌ی زمین در کویر لوت است.

۳ ④

۲ ③

۴ ②

۱ ①

گزینه ۳ ✓

نقطه‌ی موارد (الف)، (پ)، (ت) و (ج) جمله‌ی خبری هستند که در بین آن‌ها؛

موارد (ب) و (ث) قابل تعیین درستی یا نادرستی نبوده و گزاره نیستند.

----- ❖ -----

در ادامه، نمونه‌های گوناگونی از تعیین ارزش گزاره‌های مرکب آورده می‌شود.

❖ اگر گزاره‌ی درست، p گزاره‌ی نادرست و q گزاره‌ی دلخواه باشد، ارزش گزاره‌ی $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow p)$ برابر ارزش کدام است؟ (کنکور ۱۳۹۸)

~r ④

همیشه نادرست ③

همیشه درست ②

r ①

گزینه ۴ ✓

گزاره‌ی $p \wedge q$ نادرست است، چون p درست است، اگر r درست باشد، $r \Leftrightarrow p$ نیز درست و اگر r نادرست باشد، $r \Leftrightarrow p$ نیز نادرست است، پس تا این‌جا، کل گزاره چنین است:

$$r \Rightarrow n$$

اکنون، اگر r درست باشد، گزاره‌ی بالا نادرست و اگر r نادرست باشد، گزاره‌ی بالا درست است، یعنی هم‌ارزش با $\sim r$ است.

----- ❖ -----

❓ اگر گزاره‌ی مرکب $(p \wedge q) \vee (\sim p \Rightarrow q)$ نادرست باشد، در این صورت ارزش گزاره‌های p و q به ترتیب کدام است؟

- 1 درست - درست
2 درست - نادرست
3 نادرست - درست
4 نادرست - نادرست

گزینه ۴ ✓

ارزش کلی گزاره‌ها چنین بوده:

$$\underbrace{(p \wedge q)}_N \vee \underbrace{(\sim p \Rightarrow q)}_N$$

چون $(\sim p \Rightarrow q)$ نادرست است، پس $\sim p$ درست و q نادرست بوده است. (یعنی: p نادرست بوده)



❓ اگر ارزش گزاره‌ی $(\sim p \wedge q) \Rightarrow ((q \wedge r) \Rightarrow \sim s)$ نادرست باشد، ارزش کدام گزاره درست است؟

- 1 $p \wedge \sim r$
2 $s \Rightarrow \sim q$
3 $p \Rightarrow s$
4 $\sim r \vee \sim q$

گزینه ۳ ✓

باید $(\sim p \wedge q)$ درست و $(q \wedge r) \Rightarrow \sim s$ نادرست باشد؛ پس:

- p نادرست و q درست بوده است. (چون تست در همین مرحله معلوم شد!)

ادامه برای آموزش:

- باید $(q \wedge r)$ درست و $\sim s$ نادرست باشد، یعنی: s و r هر دو درست بوده‌اند. اکنون واضح است که سه گزینه‌ی دیگر ارزش نادرست دارند.



❓ اگر گزاره‌ی $(p \wedge \sim q) \vee \sim p$ نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش کدام گزاره با بقیه متفاوت است؟

- 1 $(p \vee \sim r) \wedge q$
2 $(p \wedge q) \vee (\sim p \vee r)$
3 $\sim (p \wedge q) \wedge r$
4 $(r \wedge q) \vee p$

گزینه ۳ ✓

هر دو نادرست $(p \wedge \sim q)$ و $\sim p$ $\xrightarrow{\text{natijeh}}$ نادرست $(p \wedge \sim q) \vee \sim p$

$$\sim \underbrace{\underbrace{(p \wedge q)}_D}_N \wedge r$$

پس p درست است و طبق نادرستی $p \wedge \sim q$ ، باید $\sim q$ نادرست، یعنی q هم درست باشد. اکنون با جایگذاری می‌بینید که فقط گزینه‌ی سوم به صورت روپرو بوده و نادرست است.



ممکن است لازم باشد طبق مباحث مختلف کتاب‌های درسی یا حتی اطلاعات عمومی، درستی یا نادرستی برخی گزاره‌ها را معلوم کنید.

ارزش کدام گزاره با بقیه متفاوت است؟

- 1 گروه خونی افراد متغیر کیفی ترتیبی است یا ۲۵ مربع کامل است.
- 2 رابطه‌ی $f = \{(1, -3), (-3, -3)\}$ تابع است یا هر عدد فرد، مضرب ۳ است.
- 3 عبارت $32 - 2x^2$ قابل تجزیه نیست و $\sqrt{2}$ عددی گنگ است.
- 4 تعداد خودروهای یک پارکینگ متغیر کمی نسبتی است و نمودار $y = x$ از نواحی اول و سوم می‌گذرد.

گزینه ۳

گزینه‌ی سوم به صورت (ن ۸) پوده و نادرست است، چون:

$$32 - 2x^2 = 2(16 - x^2) = 2(4 - x)(4 + x) \quad \text{تمیزه شدا}$$

سایر گزینه‌ها دارای ارزش درست هستند.

در جای خالی چه گزاره‌ای قرار دهیم تا ارزش گزاره‌ی مرکب ایجاد شده، نادرست باشد؟

$$\left[\left(-\frac{1}{3} < -\frac{1}{4} \right) \vee \dots \right] \wedge (\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z})$$

- 1 تقریباً ۷۵ درصد داده‌ها بزرگ‌تر از چارک اول هستند.
- 2 رتبه‌ی افراد در کنکور، متغیر کمی نسبتی است.
- 3 معادله‌ی $x^2 - 36 = 0$ دو ریشه‌ی قرینه دارد.
- 4 تمام مقسوم علیه‌های طبیعی عدد ۵۰ عبارتند از ۱، ۲، ۵، ۱۰، ۲۵، ۵۰.

گزینه ۲

چون $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ درست است، باید $\left[\left(-\frac{1}{3} < -\frac{1}{4} \right) \vee \dots \right]$ نادرست باشد و در نتیجه به اجبار باید در جای خالی یک گزاره‌ی نادرست جای گیرد. فقط مورد دوم چنین است، چون:

رتبه‌ی افراد در کنکور، متغیر کمی فاصله‌ای است.

نکته ۲

همیشه درست یا نادرست:

برخی گزاره‌های مرکب، در تمام حالت‌های گوناگون ارزش گزاره‌های ساده‌ی تشکیل دهنده‌شان، فقط درست یا فقط نادرست هستند. نمونه‌هایی ببینید:

❖ گزاره‌های $p \Rightarrow p$ و $p \vee \sim p$ همیشه درست هستند.

چون در اولی حالت (ن \vee ن) و در دومی حالت (ن \Rightarrow د) رخ نمی‌دهد.

❖ گزاره‌های $p \Leftrightarrow \sim p$ و $p \wedge \sim p$ همیشه نادرست هستند.

چون در اولی حالت (د \wedge د) و در دومی حالت (د \Leftrightarrow د یا ن \Leftrightarrow ن) رخ نمی‌دهد.

در کل:

با قدری بررسی، می‌توان این نوع گزاره‌ها را تشخیص داد.

❖ اگر p و q دو گزاره‌ی دلخواه باشند، در این صورت کدام گزاره همواره درست کدام است؟

④ $p \Rightarrow \sim(p \vee q)$

③ $p \Rightarrow (p \wedge \sim q)$

② $p \Rightarrow (p \vee q)$

① $p \Rightarrow (\sim p \wedge q)$

گزینه ۲

زیرا:

اگر p نادرست باشد، طبق انتقاعی مقدم، گزاره‌ی مرکب درست است.

اگر p درست باشد، $(p \vee q)$ نیز درست بوده و پازهم گزاره‌ی مرکب درست خواهد بود.

----- ❖ -----

❖ اگر p گزاره‌ای درست و q یک گزاره‌ی نادرست باشد، در مورد ارزش گزاره‌ی $(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)$ کدام صحیح است؟

② همواره نادرست

① همواره درست

④ به ارزش s بستگی دارد.

③ به ارزش r بستگی دارد.

گزینه ۱

چون q نادرست است، ترکیب عطفی $(q \wedge s)$ نادرست شده و در نتیجه، ترکیب شرطی طبق انتقاعی مقدم، خود به خود درست خواهد بود.

----- ❖ -----

در مورد جدول ارزش گزاره‌های مرکب:

نکته ۳

برای یک گزاره جدول ۲ سطری، برای دو گزاره جدول $2^2 = 4$ سطری و ... است و در کل:

وقتی تعداد n گزاره‌ی ساده در گزاره‌ی مرکب حضور دارند، جدول 2^n سطر (حالت) خواهد داشت.

برای نمونه:

جدول $(p \wedge q) \Rightarrow r$ دارای $2^3 = 8$ حالت و جدول $p \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$ دارای $2^3 = 8$ حالت است.