به نام خدا

ریاضی دهم انسانی

مولف :

فرهاد شعبانی

انتشارات ارسطو
(سازمان چاپ و نشر ایران – ۱۴۰۲)
نسخه الکترونیکی این اثر در سایت سازمان چاپ و نشر ایران و اپلیکیشن کتاب رسان موجود می باشد
chaponashr.ir

سرشناسه : شعبانی، فرهاد، ۱۳۶۶
عنوان و نام پدیدآور : ریاضی دهم انسانی/ مولف فرهاد شعبانی.
مشخصات نشر : ارسطو (سامانه اطلاع رسانی چاپ و نشر ایران)، ۱۴۰۲.
مشخصات ظاهری : ۲۰۵ ص.
شابک : ۶-۱۶۰-۳۳۹-۶۲۲-۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی : فیپا
موضوع : آموزش ریاضی
رده بندی کنگره : HD۶۲/۷
رده بندی دیویی : ۶۵۸/۱۷
شماره کتابشناسی ملی : ۹۱۸۱۸۲۷
اطلاعات رکورد کتابشناسی : فیپا

نام کتاب : ریاضی دهم انسانی
مولف : فرهاد شعبانی
ناشر : ارسطو (سامانه اطلاع رسانی چاپ و نشر ایران)
صفحه آرایی، تنظیم و طرح جلد: پروانه مهاجر
تیراژ : ۱۰۰۰ جلد
نوبت چاپ : اول - ۱۴۰۲
چاپ : زبرجد
قیمت : ۱۶۴۰۰۰ تومان
فروش نسخه الکترونیکی - کتاب‌رسان :
https://chaponashr.ir/ketabresan
شابک : ۶-۱۶۰-۳۳۹-۶۲۲-۹۷۸
تلفن مرکز پخش : ۰۹۱۲۰۲۳۹۲۵۵
www. chaponashr. ir

انتشارات ارسطو
چاپ و نشر ایران
Chaponashr.ir

فهرست کامل

۱ معادله، اتحاد و تجزیه
معرفی معادله و جواب، معادله‌ی درجه اول و روش حل، یادآوری اتحادها و تجزیه‌ی عبارات، معرفی معادله‌ی درجه دوم
+ بخش ویژه کنکور، تمرینات تشریحی و تست
۲

۲ معادله درجه دوم و گویا
روش‌های تجزیه، مربع کامل و دلتا در حل معادلات درجه دوم، حل معادلات گویا و برخی مسائل کاربردی
+ بخش ویژه کنکور، تمرینات تشریحی و تست
۳۰

۳ تابــع
مقدمات موضوع توابع، متغیرهای مستقل و وابسته، معرفی توابع با توصیف، زوج‌های مرتب، نمودارهای پیکانی و مختصاتی، ضابطه توابع
+ بخش ویژه کنکور، تمرینات تشریحی و تست
۶۶

۴ نمودار برخی توابع
خط، نمودار، شیب، نمودار توابع درجه اول، معرفی سهمی نمودار تابع درجه دوم، ماکزیمم و می‌نیمم این نوع توابع و کاربردها
+ بخش ویژه کنکور، تمرینات تشریحی و تست
۹۴

۵ متغیر و داده‌ها
معرفی آمار و مفاهیم پایه آماری، جامعه و نمونه، داده‌های آماری، روش‌های جمع آوری داده‌ها، متغیرهای جامعه و انواع آن
+ بخش ویژه کنکور، تمرینات تشریحی و تست
۱۲۶

۶ شاخص‌های آماری
شاخص‌هایی که مرکزیت داده‌ها را نشان می‌دهند (مد، میانه، میانگین و چارک‌ها) و شاخص‌های پراکندگی و روش‌های محاسبه
+ بخش ویژه کنکور، تمرینات تشریحی و تست
۱۴۸

۷ نمایش داده‌ها
نمودارهای یک متغیره (میله‌ای، بافت نگاشت، نقطه‌ای، دایره‌ای، جعبه‌ای و چند متغیره (پراکنش نگاشت، حبابی و راداری)
+ بخش ویژه کنکور، تمرینات تشریحی و تست
۱۷۷

۱

معادله، اتحاد و تجزیه

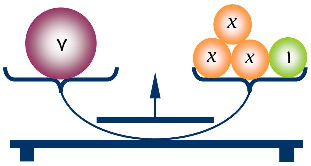
فهرست مطالب	صفحه
معادله درجه اول	۳
اتحاد و تجزیه	۷
معادله درجه دوم	۱۳
ویژه کنکور	۱۶
تمرینات تشریحی و منتخب کتاب درسی	۲۵
تمرینِ تست	۲۶

بخش ۱
معادله درجه‌ی اول

در این بخش، مفهوم معادله و جواب آن را به صورت دقیق بیان کرده و روش حل معادلات درجه اول را می‌بینیم.

مثال: (از کتاب)

با توجه به موازنه‌ی روبرو، یک تساوی بنویسید.



پاسخ

سمت راست به صورت $۱+x+x+x$ و سمت چپ عدد ۷ است. پس:

$$۱+۳x=۷$$

معادله و جواب‌ها

هر تساوی بر حسب یک مجهول مانند x یک معادله تشکیل می‌دهد. مانند:

$$۲x-۱=۳x \qquad \text{و} \qquad \frac{x+۱}{۳}-۲x=\frac{۱}{۲}$$

بعلاوه:

هر عددی که در معادله صدق می‌کند، یک **«جواب»** یا یک **«ریشه»** معادله است. مجموعه‌ی تمام جواب‌ها را **«مجموعه جواب»** معادله گویند.

برای نمونه، در معادله‌ی $۱+۳x=۷$:

عدد ۲ یک جواب معادله است؛ زیرا:

$$۱+۳(۲)=۱+۶=۷$$

ولی، عدد ۱ جواب این معادله محسوب نمی‌شود. زیرا در معادله صدق نمی‌کند:

$$۱+۳(۱)=۱+۳\neq ۷$$

برای حل یک معادله، باید آن را ساده و جواب‌ها را معلوم کرد. این کار معمولاً طبق قوانین زیر انجام می‌شود:

خواص تساوی:

- همواره می‌توان به دو طرف تساوی عددی را اضافه یا کم کرد:

$$a=b \Rightarrow \begin{cases} a+c=b+c \\ a-c=b-c \end{cases}$$

نتیجه:

اگر یک مقدار مانند b از یک طرف تساوی به طرف دیگر منتقل شود، علامت آن تغییر می‌کند. زیرا اگر تساوی $a+b=c$ را داشته باشیم، با کم کردن b از دو طرف داریم:

$$a+b=c \rightarrow a+\underbrace{b-b}_{=0}=c-b \Rightarrow a=c-b$$

- همواره می‌توان عددی را در دو طرف یک تساوی ضرب کرد؛ یعنی:

$$a=b \Rightarrow ac=bc$$

- توجه داشته باشید که تقسیم دو طرف فقط بر عددی غیر صفر ممکن و مجاز است:

$$a=b\ ,\ c\neq 0 \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{c}$$

ساده‌ترین نوع معادلات و روش حل آن را یادآوری می‌کنیم:

معادله درجه اول

معادله‌ای که پس از ساده شدن به صورت $ax=b$ نوشته شود، معادله‌ی درجه اول نام دارد. در این معادله:

- عدد a باید غیر صفر باشد و به آن «**ضریب مجهول**» گویند.
- مقدار b هر عددی می‌تواند باشد و به آن «**طرف معلوم**» گفته می‌شود.

روش حل:

طبق خواص تساوی:

- مجهولات به سمت چپ و عددها به سمت راست رفته تا شکل $ax=b$ بدست آید.
- با تقسیم طرفین معادله بر a، جواب معادله به صورت $x=\frac{b}{a}$ بدست خواهد آمد:

$$ax=b \xrightarrow{\div a} \frac{ax}{a}=\frac{b}{a} \Rightarrow x=\frac{b}{a}$$

رابطه‌ی آخر معمولاً به صورت زیر خوانده می‌شود:

$$x=\frac{\text{طرف معلوم}}{\text{ضریب مجهول}}$$

مثال: معادله‌ی $-2x+3=x-6$ را حل کنید.

پاسخ

روش بالا را به کار می‌بریم:

$$-2x-x=-6-3 \rightarrow -3x=-9 \rightarrow x=\frac{-9}{-3} \Rightarrow x=3$$

-----------✧-----------

توجه کنید:

در صورتی که ضرایب معادله شامل عددهای کسری هم باشند، بهتر است ابتدا طرفین معادله را در عددی که بر همه مخرج‌ها بخش‌پذیر باشد، ضرب کنیم تا مخرج‌ها از بین بروند؛ (بهترین انتخاب ک.م.م مخرج‌ها است.)

مثال: معادله‌ی $\frac{-x-۳}{۲}-۱=\frac{۳}{۴}-۲x$ را حل کنید.

پاسخ

چون عدد ۴ بر تمام مخرج‌ها بخش‌پذیر است، دو طرف معادله را در آن ضرب می‌کنیم:

$$۴\times\frac{-x-۳}{۲}-۴\times۱=۴\times\frac{۳}{۴}-۴\times۲x \rightarrow -۲x-۶-۴=۳-۸x \rightarrow -۲x+۸x=۳+۶+۴$$

$$\rightarrow ۶x=۱۳ \xrightarrow{\div ۶} \frac{۶}{۶}x=\frac{۱۳}{۶} \Rightarrow x=\frac{۱۳}{۶}$$

مثال: $\frac{۵}{۷}$ عددی به اضافه‌ی عدد ۱۸، دو برابر همان عدد است. این عدد را بیابید.

پاسخ

عدد مورد نظر را با مجهول x نشان می‌دهیم. طبق اطلاعات داده شده:

$$\frac{۵}{۷}x+۱۸=۲x \xrightarrow{\times ۷} ۷\times\frac{۵}{۷}x+۷\times۱۸=۷\times۲x \rightarrow ۵x+۱۲۶=۱۴x$$

$$\rightarrow ۵x-۱۴x=-۱۲۶ \rightarrow -۹x=-۱۲۶ \rightarrow x=\frac{-۱۲۶}{-۹} \Rightarrow x=۱۴$$

مثال: (از کتاب)

پرنده‌ای با گروهی از پرندگان مواجه شده است. سردسته گروه برای معرفی تعدادشان به آن پرنده می‌گوید:

«ما و ما و نصف ما و نیمه‌ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، جملگی صد می‌شویم.»

شرط این‌که گروه حاضر به پذیرش پرنده‌ی اول در جمع خود شود، تعیین تعداد اعضای گروه است. این مقدار را تعیین کنید.

پاسخ

اگر تعداد اعضای گروه را x بگیریم،

ما یعنی: x، **نصف ما** یعنی: $\frac{x}{۲}$ و **نیمه‌ای از نصف ما** یعنی: $\frac{\frac{x}{۲}}{۲}=\frac{x}{۴}$. پس:

$$\underbrace{x+x}_{=۲x}+\frac{x}{۲}+\frac{x}{۴}+۱=۱۰۰ \xrightarrow{\times ۴} ۸x+۲x+x+۴=۴۰۰$$

$$\rightarrow ۱۱x=۴۰۰-۴=۳۹۶ \Rightarrow x=\frac{۳۹۶}{۱۱}=۳۶$$

مثال: دانش‌آموزی ۵۴۰۰۰ تومان پول دارد. او با $\frac{۱}{۴}$ پولش تعدادی خودکار به قیمت هر عدد ۱۲۰۰ تومان و تعدادی مداد به قیمت هر عدد ۹۰۰ تومان خریداری کرده به طوری که تعداد مدادها یکی بیشتر از تعداد خودکارها است. مجموع تعداد مداد و خودکار را حساب کنید.

پاسخ

تعداد خودکار: x. پس تعداد مدادها $x+۱$ بوده و طبق اطلاعات داده شده:

$$۱۲۰۰\times x+۹۰۰\times(x+۱)=\frac{۱}{۴}\times ۵۴۰۰۰ \rightarrow ۱۲۰۰x+۹۰۰x+۹۰۰=۱۳۵۰۰ \rightarrow$$

$$\rightarrow ۲۱۰۰x=۱۲۶۰۰ \Rightarrow x=\frac{۱۲۶۰۰}{۲۱۰۰}=\frac{۱۲۶}{۲۱}=۶$$

پس ۶ خودکار و $۶+۱=۷$ مداد خریده است:

$$۶+۷=۱۳$$

بخش ۲
اتحاد و تجزیه

در این بخش، مفهوم اتحاد جبری، اتحادهای ضروری و کاربرد آن‌ها در تجزیه‌ی عبارت‌های جبری را به عنوان پیش زمینه‌ی لازم برای مطالعه‌ی موفق مباحث بعدی، بویژه حل انواع معادلات، یادآوری و تکمیل می‌کنیم.

اتحاد جبری:

یک تساوی جبری (بر حسب متغیری مانند x) که برای هر عدد که جای x قرار گیرد، درست باشد. مانند:

$$x(x-۱)=x^{۲}-x \quad \text{یا} \quad x+۲x=۳x$$

دانستن و کاربرد اتحادهای مهم زیر، ضروری است:

اتحاد مربع دو جمله‌ای

دو حالت دارد؛ اتحاد «**مربع جمع دو جمله**» به صورت زیر بیان می‌شود:

$$(a+b)^{۲}=a^{۲}+۲ab+b^{۲}$$

بعلاوه:

اگر به جای b، در اتحاد بالا $-b$ قرار دهیم، حالت دوم: «**مربع تفاضل دو جمله**» حاصل می‌شود:

$$\boxed{(a-b)^{۲}=a^{۲}-۲ab+b^{۲}}$$

مثال‌هایی ببینید:

مثال: مربع عبارت $x+۵$ با استفاده از اتحاد:

$$(\underbrace{x}_{a}+\underbrace{۵}_{b})^{۲}=(x)^{۲}+۲(x)(۵)+(۵)^{۲}=x^{۲}+۱۰x+۲۵$$

توجه کنید:

در محاسبات پایانی، اولویت محاسبات و قوانین توان‌ها رعایت شده و روش ضرب یک جمله‌ای به‌کار رفته است.

مثال: تعیین مقدار عدد توانی $۵۱^{۲}$ با استفاده از اتحاد:

$$۵۱^{۲}=(\underbrace{۵۰}_{a}+\underbrace{۱}_{b})^{۲}=(۵۰)^{۲}+۲(۵۰)(۱)+(۱)^{۲}=۲۵۰۰+۱۰۰+۱=۲۶۰۱$$

مثال: حاصل عبارت مقابل را با استفاده از اتحاد به‌دست آورید. $(۳x-۱)^{۲}=$

پاسخ

0916 992 5753
farhad.shabani66

طبق حالت تفاضل دو جمله:

$$(\underbrace{۳x}_{a}-\underbrace{۱}_{b})^۲=(۳x)^۲-۲(۳x)(۱)+(۱)^۲=۹x^۲-۶x+۱$$

------------✧------------

اتحاد مزدوج

تساوی مربوطه از ضرب $a+b$ و $a-b$ حاصل می‌شود:

$$(a+b)(a-b)=a^۲-b^۲$$

نمونه‌هایی از محاسبات با این اتحاد را ببینید:

- $(x+۵)(x-۵)=(x)^۲-(۵)^۲=x^۲-۲۵$
- $(۲x+۳y)(۲x-۳y)=(۲x)^۲-(۳y)^۲=۴x^۲-۹y^۲$
- $(x^۲+۱)(۱-x^۲)=(۱+x^۲)(۱-x^۲)=۱^۲-(x^۲)^۲=۱-x^۴$

مثال: عبارت زیر را تا حد ممکن ساده کنید:

$$(۲x-۱)(۲x+۱)(۴x^۲+۱)$$

پاسخ

با توجه به وجود جملات مشابه $۲x-۱$ و $۲x+۱$ از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\underbrace{(۲x-۱)(۲x+۱)}_{(۲x)^۲-(۱)^۲}(۴x^۲+۱)=(۴x^۲-۱)(۴x^۲+۱)$$

اکنون بازهم اتحاد مزدوج قابل کاربرد است:

$$(۴x^۲-۱)(۴x^۲+۱)=(۴x^۲)^۲-۱^۲=۱۶x^۴-۱$$

------------✧------------

اتحاد جمله مشترک

در این اتحاد، ضرب $(x+a)(x+b)$ انجام می‌شود که در آن فقط یک جمله‌ی مشترک x وجود دارد و جملات a و b غیر مشترک هستند:

$$(x+a)(x+b)=x^۲+(a+b)x+ab$$

نمونه‌هایی ببینید:

- $(x+۵)(x-۳)=(x)^۲+(۵-۳)(x)+(۵)\times(-۳)=x^۲+۲x-۱۵$

- $(x^۲-۳)(x^۲-۱)=(x^۲)^۲+(-۳-۱)(x^۲)+(-۳)\times(-۱)=x^۴-۴x^۲+۳$

هنگام جایگذاری، از پرانتز استفاده کرده و اولویت محاسبات را فراموش نکنید.

در ادامه با یک مفهوم بسیار مهم و پرکاربرد در مورد چند جمله‌ای‌ها آشنا می‌شویم:

تجزیه‌ی عبارات

منظور از تجزیه کردن یک چندجمله‌ای:

نوشتن آن به‌صورت ضرب دو یا چند چندجمله‌ای با درجات کمتر است.

برای نمونه، در اتحاد:

$$(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲$$

عبارت سمت چپ تجزیه شده‌ی عبارت سمت راست می‌باشد؛ زیرا سمت راست به صورت مجموع و سمت چپ به صورت ضرب $(a+b)(a+b)$ است.

(به هر کدام از پرانتزهای ضرب شده، یک عامل تجزیه یا عامل ضرب گفته می‌شود.)

بعلاوه:

یکی از دو روش زیر یا هر دو همزمان، باعث تجزیه‌ی عبارات می‌شوند:

فاکتورگیری و **استفاده از اتحادها**

فاکتورگیری:

این کار فقط در عبارات جمع یا تفریق ممکن بوده و همزمان باعث خلاصه کردن عبارات و یک مرحله تجزیه‌ی آن می‌شود:

در عبارت $ab+ac$ می‌توان از a فاکتور گرفت و نوشت: $ab+ac=a(b+c)$.

روش انجام:

به دنبال حروف یا عامل‌های ضربِ مشترک با توان کوچک‌تر در بین جملات بگردید؛ برای نمونه در عبارت:

$$۳x^۳-۶x^۲+۳x$$

جمله‌ی $۳x$ در هر سه جمله به صورت ضرب وجود دارد. بنابراین:

$$۳x^۳-۶x^۲+۳x=۳x(x^۲-۲x+۱)$$

در صورت لزوم، عبارت داخل پرانتز را توسط تقسیم جملات بر عبارت فاکتور گرفته شده مشخص کنید.

مثال: در عبارت $x^۲ab+x^۲b^۲$ تا حد ممکن فاکتورگیری کنید.

پاسخ

عبارت $x^۲b$ در بین هر دو جمله مشترک است. پس:

$$x^۲ab+x^۲b^۳=x^۲b\left(\frac{x^۲ab}{x^۲b}+\frac{x^۲b^۳}{x^۲b}\right)=x^۲b(a+b^۲)$$

مثال: عبارت $x(x-2)+(1-2x)(x-2)$ را به صورت ضرب بنویسید.

پاسخ

عبارت $(x-2)$ در هر دو عبارت جمع مشترک است. فاکتورگیری:

$$x(x-2)+(1-2x)(x-2)=(x-2)(x+1-2x)=(x-2)(1-x)$$

تجزیه توسط اتحاد:

در هر سه اتحاد گفته شده‌ی قبل، یک طرف تساوی تجزیه شده‌ی طرف دیگر است:

تجزیه با اتحاد مربع:

اگر $a^2+2ab+b^2$ داده شود، تجزیه‌ی آن $(a+b)^2$ است؛ زیرا در واقع به صورت ضرب $(a+b)(a+b)$ است.

(تجزیه‌ی $a^2-2ab+b^2$ نیز به صورت $(a-b)^2$ است.)

دو نمونه تجزیه به این روش:

- $x^2-8x+16=(x-4)^2$
- $4x^2+12xy+9y^2=(2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2=(2x+3y)^2$

تجزیه با اتحاد مزدوج:

اگر a^2-b^2 داده شود، تجزیه‌ی آن $(a+b)(a-b)$ است.

توجه کنید:

شرایط این که تجزیه توسط اتحاد مزدوج انجام شود، عبارت است از:

- عبارت مورد نظر دو جمله‌ای به صورت تفریق باشد.
- هر دو جمله مجذور کامل (متغیر با توان زوج) باشند؛ مانند x^2 یا $9y^4$ و ...

برای نمونه؛

- $x^2-25=x^2-5^2=(x+5)(x-5)$
- $4x^2-9y^2=(2x)^2-(3y)^2=(2x+3y)(2x-3y)$

تجزیه با اتحاد مشترک:

اگر $x^2+(a+b)x+ab$ داده شود، تجزیه‌ی آن $(x+b)(x+b)$ است.

توجه کنید:

معمولاً سه جمله‌ای‌ها توسط این روش تجزیه می‌شوند. مثلاً در تجزیه‌ی عبارت

$$x^2\underbrace{+10}_{a+b}x\underbrace{+16}_{ab}$$

جمله‌ی مشترک x است و باید دو عدد یافت که جمع آن‌ها برابر ۱۰ و ضربشان برابر ۱۶ شود. این دو عدد ۲ و ۸ هستند که جای a و b در اتحاد مشترک قرار می‌گیرند:

$$x^2+10x+16=(x+2)(x+8)$$

0916 992 5753
farhad.shabani66

سؤال: چرا در مورد عبارت $x^۲+۱۰x+۱۶$ اتحاد مربع به‌کار نمی‌رود؟)

چند نمونه‌ی دیگر از تجزیه توسط اتحادها:

مثال: عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $a^۲b^۲-۶ab+۹$ ب) $۹a^۲-b^۲$ پ) $x^۲+۵x-۲۴$

پاسخ

الف) اتحاد مربع قابل کاربرد است:

$$a^۲b^۲-۶ab+۹=(ab)^۲-۲(ab)(۳)+(۳)^۲=(ab-۳)^۲$$

ب) شرایط استفاده از اتحاد مزدوج وجود دارد:

$$۹a^۲-b^۲=(۳a)^۲-b^۲=(۳a-b)(۳a+b)$$

پ) طبق اتحاد یک جمله مشترک:

$$x^۲+۵x-۲۴=(x-۳)(x+۸)$$

مثال: عبارت $a^۴-۸۱$ را تا جای ممکن تجزیه کنید.

پاسخ

چون $a^۴=(a^۲)^۲$ و $۸۱=۹^۲$ است:

$$a^۴-۸۱=(a^۲)^۲-۹^۲=(a^۲-۹)(a^۲+۹)$$

واضح است که عبارت $(a^۲-۹)$ هنوز قابل تجزیه است:

$$a^۴-۸۱=(a^۲-۹)(a^۲+۹)=(a-۳)(a+۳)(a^۲+۹)$$

توجه کنید:

ممکن است لازم باشد ابتدا فاکتورگیری کرده تا بتوان اتحادها را با هدف تجزیه کردن به‌کار برد.

نمونه‌ای ببینید:

در تجزیه‌ی عبارت $۲x-x^۲-۱$ شرایط اتحاد مربع برقرار نیست؛ اگر ابتدا (از منفی) فاکتورگیری کنیم، راه باز می‌شود:

$$۲x-x^۲-۱=-(x^۲-۲x+۱)=-(x-۱)^۲$$

مثال: عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $x^۲y-۶xy+۹y$

ب) $x^۵-۸۱x$

پاسخ

الف) ابتدا فاکتور گیری و سپس اتحاد مربع را به‌کار می‌بریم:

$$x^{۲}y-۶xy+۹y=y(x^{۲}-۶x+۹)=y(x-۳)^{۲}$$

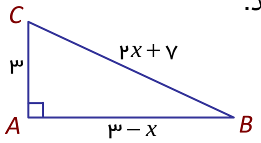
ب) فاکتورگیری از x کرده و سپس اتحاد مزدوج را تا جای ممکن به‌کار می‌بریم:

$$x^{۵}-۸۱x=x(x^{۴}-۸۱)=x(x^{۲}-۹)(x^{۲}+۹)=x(x-۳)(x+۳)(x^{۲}+۹)$$

بخش ۳
معادله‌ی درجه ۲

در این بخش، معادله‌ی درجه‌ی دوم را معرفی کرده و حل آن را در یک حالت خاص می‌بینیم. بررسی بیشتر و بیان روش‌های دیگری برای حل این نوع معادله، در مبحث بعد آمده است. نمونه‌ی زیر را ببینید:

مثال: در شکل مقابل، معادله‌ای بر حسب x بنویسید و درجه‌ی آن را مشخص کنید.



پاسخ

باید رابطه‌ی فیثاغورس را بنویسیم تا x مشخص شده و سپس طول وتر به‌دست آید:

$$(۲x+۷)^۲ = ۳^۲ + (۳-x)^۲ \rightarrow ۴x^۲ + ۲۸x + ۴۹ = ۹ + ۹ - ۶x + x^۲$$

این معادله پس از انتقال جملات به سمت چپ و ساده کردن آن، به یک معادله‌ی درجه دوم تبدیل می‌شود:

$$۳x^۲ + ۳۴x + ۳۱ = ۰$$

معادله درجه دوم

هر گاه یک معادله پس از ساده شدن بر حسب x درجه ۲ باشد، به آن یک «**معادله‌ی درجه دوم**» گفته می‌شود.

شکل کلی:

$$ax^۲ + bx + c = ۰$$

چنان‌که در بالا می‌بینید:

- ضریب $x^۲$ را با a نشان می‌دهند.

توجه:

باید a غیر صفر باشد، زیرا در غیر این صورت درجه‌ی معادله از دو کمتر می‌شود.

- ضریب x را با b و عدد ثابت که مستقل از x است را با c نشان می‌دهیم.

روشی برای حل حالت خاص و ساده‌ی معادلات درجه دوم را ببینید.

روش ریشه‌گیری:

فرض کنید a عددی معلوم باشد. معادله‌ای به صورت:

$$x^۲ = a$$

را در نظر گرفته و به سه حالت در مورد جواب آن توجه کنید:

۱) اگر a عددی منفی باشد، چون $x^۲$ هیچ‌گاه منفی نمی‌شود، تساوی $x^۲ = a$ غیرممکن بوده و معادله جواب ندارد.

برای نمونه، معادله‌ی $x^۲ + ۴ = ۰$ هیچ جوابی ندارد:

$$x^۲ + ۴ = ۰ \rightarrow x^۲ = -۴$$ **(چون $x^۲$ نمی‌تواند منفی شود.)**

۲) اگر $a = ۰$ باشد، فقط یک عدد به عنوان جواب به‌دست خواهد آمد:

$$x^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

۳) اگر a عددی مثبت باشد، معادله‌ی $x^۲ = a$ دارای دو جواب مختلف (متمایز) خواهد بود:

$$\boxed{x^۲ = a \Rightarrow x = \sqrt{a} \ , \ x = -\sqrt{a}}$$

برای نمونه، حل معادله‌ی $۲x^۲ - ۴ = ۰$ را ببینید:

$$۲x^۲ - ۴ = ۰ \rightarrow ۲x^۲ = ۴ \xrightarrow{\div ۲} x^۲ = ۲ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۲}$$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $(۲x + ۱)^۲ - ۹ = ۰$

ب) $x^۲ - ۴x + ۴ = ۱$

پاسخ

الف) طبق نکته‌ی قبل می‌نویسیم:

$$(۲x+۱)^۲ = ۹ \rightarrow \begin{cases} ۲x+۱ = ۳ \rightarrow ۲x = ۲ \Rightarrow x = ۱ \\ ۲x+۱ = -۳ \rightarrow ۲x = -۴ \Rightarrow x = -۲ \end{cases}$$

ب) به سمت چپ معادله توجه کنید؛ عبارت مربوطه را به اتحاد مربع دوجمله‌ای تبدیل کرده و مانند قسمت قبل عمل می‌کنیم:

$$(x-۲)^۲ = ۱ \rightarrow \begin{cases} x-۲ = ۱ \Rightarrow x = ۳ \\ x-۲ = -۱ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$$

مثال: معادله‌ی $x^۲ + ۶x + ۴ = ۱۱$ را به روش بالا حل کنید.

پاسخ

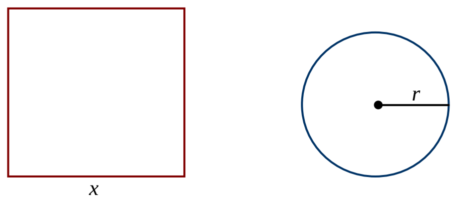
عبارت سمت چپ مربع کامل نیست، ولی جمع عدد ۵ در طرفین، مشکل را رفع می‌کند:

$$x^۲ + ۶x + ۴ + ۵ = ۱۱ + ۵ \rightarrow x^۲ + ۶x + ۹ = ۱۶ \rightarrow (x+۳)^۲ = ۱۶$$

$$\rightarrow \begin{cases} x+۳ = ۴ \Rightarrow x = ۴ - ۳ = ۱ \\ x+۳ = -۴ \Rightarrow x = -۴ - ۳ = -۷ \end{cases}$$

مثال: (تمرین از کتاب)

اگر مجموع مساحت‌های دو شکل زیر برابر ۶ باشد، طول ضلع مربع سمت چپ را حساب کنید.



$r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x$

پاسخ

می‌دانیم مساحت مربع برابر «ضلع به توان ۲» و مساحت دایره برابر «عدد π ضرب در شعاع به توان ۲» است. پس باید:

$$x^2 + \pi \times r^2 = 6 \rightarrow x^2 + \pi \times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x\right)^2 = 6 \rightarrow x^2 + \pi \times \frac{1}{2\pi} x^2 = 6 \rightarrow x^2 + \frac{1}{2} x^2 = 6$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2x^2 + x^2 = 12 \rightarrow 3x^2 = 12 \rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \,,\, x = -2$$

توجه کنید:

چون x اندازه‌ی ضلع مربع است، عدد -2 قابل قبول نبوده و فقط یک جواب $x = 2$ پذیرفته می‌شود.

ویژه آمادگی کنکور

در بخش پایانی، مطالب لازم جهت آمادگی کامل برای شرکت در آزمون‌های آزمایشی و کنکور آورده می‌شوند.

اگر در حال مطالعه برای تسلط بر کتاب و شرکت در امتحان مدرسه هستید،
می‌توانید فعلاً از خواندن این بخش صرف‌نظر کنید!

در ابتدا، تکمیل مبحث معادله‌ی درجه اول را ببینید:

نکته ۱

بحث در تعداد جواب:

می‌دانیم معادله‌ی درجه اول قابل تبدیل به صورت $ax=b$ است و با شرط $a\neq ۰$، همیشه دقیقاً یک جواب به صورت $x=\frac{b}{a}$ دارد. ولی دو حالت خیلی خاص هم وجود دارند:

- اگر $a=۰$ و $b=۰$ باشد، معادله به صورت $۰\times x=۰$ تبدیل شده و در نتیجه هر عددی در معادله صادق بوده و به عنوان جواب قبول است. (بی‌شمار جواب)
- اگر $a=۰$ و $b\neq ۰$ باشد، معادله به صورت $۰\times x=b$ تبدیل شده و در نتیجه هیچ عددی در معادله صادق نخواهد بود. (بدون جواب)

نمونه‌هایی از حل و کاربرد معادله‌ی درجه اول در ادامه:

اگر -۱ جواب معادله‌ی درجه اول $(۱-k)x^۲+۳k-۶x=۱۰m$ باشد، حاصل $k\times m$ کدام است؟

۱) $۰/۶$ ۲) $۰/۷$ ۳) $۰/۸$ ۴) $۰/۹$

گزینه ۴

چون معادله درجه اول است، باید عبارت $(۱-k)x^۲$ از بین برود. یعنی:

$$۱-k=۰ \Rightarrow k=۱$$

پس معادله به صورت $۳(۱)-۶x=۱۰m$ بوده و جواب $x=-۱$ در آن صادق است:

$$۳-۶(-۱)=۱۰m \to ۹=۱۰m \to m=\frac{۹}{۱۰} \Rightarrow k\times m=۱\times\frac{۹}{۱۰}=۰/۹$$

جواب معادله‌ی $۳x-\frac{۱}{۲}=۴(-\frac{x}{۲}+۳)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۱۱}{۱۰}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

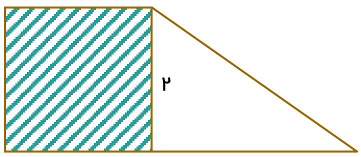
گزینه ۲

به روش گفته شده عمل می‌کنیم:

$$۲\times ۳x-۲\times\frac{۱}{۲}=۲\times ۴(-\frac{x}{۲}+۳)\ \rightarrow\ ۶x-۱=-۴x+۲۴\ \rightarrow\ ۶x+۴x=۲۴+۱$$

$$\rightarrow\ ۱۰x=۲۵\ \Rightarrow\ x=\frac{۲۵}{۱۰}=\frac{۵}{۲}$$

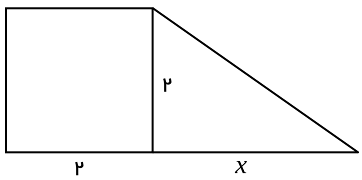
در شکل روبرو مساحت مربع از $\frac{۱}{۳}$ مساحت مثلث به اندازه‌ی سه واحد مربع بیشتر است. مساحت ذوزنقه کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۱)



❶ ۵ ❷ ۵/۵
❸ ۶/۵ ❹ ۷

گزینه ۴

اگر قاعده‌ی مثلث را x بگیریم، طبق شرایط می‌توان نوشت:



$$۲\times ۲=\frac{۱}{۳}\times\frac{۲\times x}{۲}+۳\ \xrightarrow{\times ۳}\ ۱۲=x+۹\ \Rightarrow\ x=۳$$

پس در ذوزنقه، قاعده‌ها ۲ و $۲+۳=۵$ و ارتفاع ۲ است. مساحت:

$$\frac{(۲+۵)\times ۲}{۲}=۷$$

اگر از چهار برابر عددی ۲ واحد کم شده و سپس به حاصل، ثلث همان عدد اضافه شود، جواب برابر ۲۰ می‌شود. عدد مورد نظر کدام است؟

❶ ۶ ❷ $۵\frac{۱}{۱۳}$ ❸ $۴\frac{۱۰}{۱۱}$ ❹ $۴\frac{۲}{۱۳}$

گزینه ۲

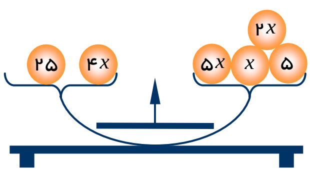
اگر عدد مجهول را x بگیرید، شرایط گفته شده چنین است:

$$۴x-۲+\frac{x}{۳}=۲۰\ \xrightarrow{\times ۳}\ ۱۲x-۶+x=۶۰\ \rightarrow\ ۱۳x=۶۶\ \Rightarrow\ x=\frac{۶۶}{۱۳}$$

با تقسیم ۶۶ بر ۱۳، جواب به عدد مخلوط تبدیل می‌شود:

$$x=\frac{۶۶}{۱۳}=۵\frac{۱}{۱۳}$$

اگر در شکل روبرو، ترازو در توازن باشد، مقدار هر کفه کدام است؟



❶ ۵ ❷ ۲۰
❸ ۴۵ ❹ ۹۰

گزینه ۳

باید مجموع مقادیر دو کفه برابر باشند:

$$۲۵+۴x=\underbrace{۵x+x+۵+۲x}_{=۸x+۵} \rightarrow ۴x-۸x=۵-۲۵ \rightarrow -۴x=-۲۰ \Rightarrow x=\frac{-۲۰}{-۴}=۵$$

مقدار هر کفه، با جایگزینی عدد ۵ در یکی از طرف‌ها مشخص می‌شود:

$$۲۵+۴(۵)=۲۵+۲۰=۴۵$$

با توجه به پیش‌بینی بازار آهن و فولاد، کارخانه ذوب آهن اصفهان از روز شنبه تا پنج‌شنبه، هر روز تولید خود را ۱/۵ برابر کرده است. اگر اختلاف تولید فولاد در روزهای چهارشنبه و دوشنبه ۴/۵ تُن باشد، تولید روز پنج‌شنبه چند تن است؟

❶ ۸/۱ ❷ ۱۲/۱۵ ❸ ۱۶/۲ ❹ ۲۴/۳

گزینه ۲

تولید در روزهای مورد نظر:

شنبه: x تن
یکشنبه: $\frac{۳}{۲}x$ تن
دوشنبه: $\frac{۳}{۲}\times\frac{۳}{۲}x=\frac{۹}{۴}x$ تن
سه‌شنبه: $\frac{۳}{۲}\times\frac{۹}{۴}x=\frac{۲۷}{۸}x$ تن
چهارشنبه: $\frac{۳}{۲}\times\frac{۲۷}{۸}x=\frac{۸۱}{۱۶}x$ تن
پنج‌شنبه: $\frac{۳}{۲}\times\frac{۸۱}{۱۶}x=\frac{۲۴۳}{۳۲}x$ تن.

طبق شرط مربوطه:

$$\frac{۸۱}{۱۶}x-\frac{۹}{۴}x=۴/۵ \xrightarrow{\times۱۶} ۸۱x-۳۶x=۷۲ \Rightarrow x=\frac{۷۲}{۴۵}=\frac{۸}{۵}$$

پس تولید روز پنج‌شنبه برابر $\frac{۲۴۳}{۳۲}\times\frac{۸}{۵}=\frac{۲۴۳}{۴}\times\frac{۱}{۵}=\frac{۲۴۳}{۲۰}=۱۲/۱۵$ خواهد بود.

توجه کنید:

گاهی معادله در شکل اولیه دو مجهول دارد؛ در چنین حالتی:

- معادله را بر حسب آن دو مجهول بنویسید.
- با توجه به شرایط داده شده، یک مجهول را بر حسب مجهول دیگر نوشته و آن را در معادله جایگزین کنید.

با حل معادله؛

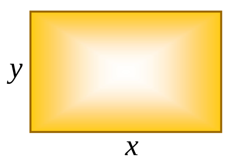
یکی از مجهولات حاصل شده و طبق شرایط، مجهول دیگر هم مشخص خواهد شد.

طول و عرض یک مستطیل به نسبت ۴ به ۳ هستند. اگر محیط آن ۱۴۰ واحد باشد، مساحت کدام است؟

❶ ۴۵۰ ❷ ۶۰۰ ❸ ۹۰۰ ❹ ۱۲۰۰

گزینه ۴

با توجه به شکل،



معادله‌ی محیط: $۲(x+y)=۱۴۰$ یا $x+y=۷۰$ را داریم. طبق شرط داده شده:

$$\frac{x}{y}=\frac{۴}{۳} \rightarrow ۴y=۳x \xrightarrow{\div۴} y=\frac{۳}{۴}x$$

جایگزینی در معادله و سپس محاسبه‌ی مساحت از دستور $S=x\times y$: