نخستین درس در

بهینه سازی غیرخطی

تألیف:

دکتر جواد وحیدی
سید طه موسوی نسب

فن‌آوری نوین

سرشناسه	:	وحیدی، جواد، ۱۳۴۸ – Javad Vahidi
عنوان و نام پدیدآور	:	نخستین درس در بهینه سازی غیرخطی/تالیف جواد وحیدی، سیدطه موسوی نسب.
مشخصات نشر	:	بابل: فناوری نوین ، ۱۳۹۹.
مشخصات ظاهری	:	۲۴۷ ص.
شابک	:	۹۷۸-۶۲۲-۷۳۹۳-۰۸-۸
وضعیت فهرست نویسی	:	فیپا
موضوع	:	برنامه‌ریزی غیرخطی
موضوع	:	Nonlinear Programming
شناسه افزوده	:	موسوی نسب، سیدطه، ۱۳۶۶-
رده بندی کنگره	:	T۸/۵۷
رده بندی دیویی	:	۷۶/۵۱۹
شماره کتابشناسی ملی	:	۷۳۱۱۰۸۱

فن‌آوری نوین

www.fanavarienovin.net

بابل، کدپستی ۷۳۴۴۸-۴۷۱۶۷

تلفن: ۰۱۱-۳۲۲۵۶۶۸۷

نخستین درس در بهینه سازی غیرخطی

تألیف: جواد وحیدی، سیدطه موسوی نسب

نوبت چاپ: چاپ اول

سال چاپ: تابستان 99

شمارگان: ۱۰۰۰

قیمت: ۵۲۵۰۰ تومان

نام چاپخانه و صحافی: **دفتر فنی سورنا**

شابک: ۸-۰۸-۷۳۹۳-۶۲۲-۹۷۸

نشانی ناشر: بابل، چهارراه نواب، کاظم‌بیگی، جنب مسجد منصور کاظم‌بیگی، طبقه اول

طراح جلد:

تهران، خ اردیبهشت، نبش وحید نظری، پلاک ۱۴۲ تلفکس: ۶۶۴۰۰۲۲۰-۶۶۴۰۰۱۴۴

فهرست مطالب

مقدمه

بهینه‌سازی موضوعی است که به طور گسترده و فزاینده‌ای در علوم استفاده می‌شود و تقریبا در اغلب شاخه‌های مهندسی، اقتصاد، مدیریت و سایر زمینه‌ها نقش آفرین است. نقش این شاخه از دانش در جهان امروزی به گونه‌ای است که بدون اغراق می‌توان گفت که بهینه‌سازی سنگ بنایی برای توسعه تمدن است.

برنامه‌سازی غیرخطی فرایند حل مسأله بهینه‌سازی است که در آن برخی از محدودیت‌ها یا خود تابع هدف غیرخطی است.

در این کتاب ضمن بیان مبانی بهینه سازی غیرخطی به نظریه و کاربردهای آن پرداخته می‌شود. به علاوه کتاب شامل بسیاری از الگوریتم‌های پایه‌ای حوزه بهینه‌سازی غیرخطی است که خواننده علاقمند می‌تواند آنها را به یکی از زبان‌های برنامه نویسی کدگذاری کند.

این کتاب به همت آقای دکتر رمضان عباس نژاد مدیر محترم انتشارات فن آوری نوین به زیور چاپ آراسته شده است که جا دارد از ایشان و همکاران ارجمندشان در انتشارات مزبور تشکر و قدردانی شود.

از خوانندگان ارجمند خواهشمندیم که پیشنهادات و ایرادت احتمالی کتاب را از طریق ناشر به آدرس پست الکترونیکی **fanavarienovin@gmail.com** با ما درمیان بگذارند.

مؤلفین

فصل ۱

مقدمات ریاضی

۱-۱ مسائل برنامه ریزی ریاضی

یکی از انواع مختلف مسائل برنامه‌ریزی، مسائل برنامه‌ریزی ریاضی است که در آن، هدف یافتن مقادیری از $x_1, ..., x_n$ است به طوری که مقدار تابع $f(x_1, ..., x_n)$ را تحت شرایط زیر ماکزیمم یا مینیمم کند.

$$g_i(x_1, ..., x_n)(\leq = \geq)b_i \; ; \; i = 1, ..., m \qquad (1-1)$$
$$x_j \geq 0 \; ; \; j = 1, ..., n$$

به تابع f تابع هدف[1] و به هرکدام از g_iها قید[2] (محدودیت) گفته می‌شود که $(x_1, ..., x_n) \in D$ زیرمجموعه ای از $\mathbb{R}^n$ می‌باشند. درحالت کلی اگر توابع f و g_i ها دارای خواص مشخصی باشند، برنامه‌ریزی مربوطه به دو دسته خطی و غیرخطی تقسیم می‌شود.

۱-۱-۱ برنامه‌ریزی خطی

در این نوع مسائل برنامه‌ریزی فرض می‌شود که تابع f و تمام g_iها برحسب متغیرهای تصمیم خطی می‌باشند و شکل کلی آن به صورت زیر است:

$$\max \text{ یا } (\min) Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$S.t : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j (\leq \; = \; \geq) b_i ; i = 1, ..., m$$

که در این مدل a_{ij}، b_i و c_j مقادیر ثابتی هستند و x_j ها متغیرهای تصمیم (فعالیت) نام دارند، c_j ضرایب تابع هدف و b_i ها و مقادیر سمت راست یا منبع i اُم می‌نامند که اگر b_i بیانگر منبع i اُم باشد، a_{ij} بیانگر مقداری از منبع b_i اُم است که برای انجام یک واحد از فعالیت j ام مورد استفاده قرار می‌گیرد. یک مسأله برنامه‌ریزی خطی باید در چهار فرض زیر صدق کند:

الف. **فرض تناسب**: این فرض بیانگر این است که متغیرهای تصمیم مستقل از همدیگر هستند و آهنگ تغییر تابع هدف متناسب با تغییرات متغیر است وضع هر قید نیز متناسب با مقداری که متغیر می‌گیرد مصرف می‌گیرد.

ب. **فرض جمع بندی**: طبق این فرض در تابع هدف و محدودیت‌ها رابطه ریاضی بین متغیرها به صورت جمع جبری بیان می‌گردد.

[1] Objective Function
[2] Constraint

ج. **فرض بخش پذیری**: این فرض بیان می‌کند که متغیرهای تصمیم فقط مقادیر پیوسته را اختیار می‌کند.
د. **فرض معین بودن**: مقدار پارمترهای a_{ij}، b_i و c_j اعداد ثابت و مشخص هستند و نمی‌توانند حالت تصادفی یا احتمالی داشته باشند.
فرض های تناسب و جمع پذیری را فرض‌های خطی می‌گوییم یعنی هرکدام نقض شوند، مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی (NLP) خواهد بود.
قابل توجه است که مدل برنامه‌ریزی خطی اعداد صحیح (ILP) یک مدل برنامه‌ریزی خطی است که در آن فرض بخش پذیری نقض شده است.
در مسائل برنامه‌ریزی خطی، هدف ماکزیمم سازی یا مینیمم‌سازی یک تابع خطی است که متغیرهای آن در تعدادی محدودیت خطی صدق می‌کند. حل این نوع از برنامه‌ریزی برای اولین بار در سال ۱۹۴۷ میلادی توسط جرج ب دنتزیگ [۳] صورت گرفت. او روشی را برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی تحت عنوان سیمپلکس ابداع نمود.

۱-۱-۲ برنامه‌ریزی غیرخطی

بسیاری از مسائل در علوم و مهندسی تحت قالب یک مسأله غیرخطی فرمول‌بندی می شوند و به علاوه در بسیاری از مسائل اقتصادی و علوم انسانی نیز با مدل های غیرخطی روبرو هستیم.
بهینه‌سازی ریاضی یا برنامه‌ریزی ریاضی در ریاضیات، اقتصاد، مدیریت به برگزیدن بهترین عضو از یک مجموعه از اعضای دست یافتنی اشاره می‌کند. در ساده‌ترین شکل تلاش می‌شود که با گزینش نظام‌مند داده‌ها از یک مجموعه قابل دستیابی و محاسبه مقدار یک تابع حقیقی مقدار بیشینه و کمینه آن به دست آید.
برنامه‌ریزی غیرخطی مترادف با **بهینه‌سازی غیرخطی** [۴] است و منظور از مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی ماکزیمم یا مینیمم کردن یک تابع ریاضی یک متغیره یا چندمتغیره (تابع هدف) که ممکن است همراه با محدودیت‌ها یا قیودی از همان متغیرها باشد.
فرم کلی یک مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی به صورت زیر است.

$$\max(\text{یا}\min)\quad f(x)$$
$$s.t:\begin{cases} g_i(x)\leq \circ & i=۱,۲,...,m\\ h_i(x)=\circ & i=۱,۲,...,k\\ x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n\end{cases}$$

[۳] G. B. Dantzig
[۴] Nonlinear Optimization

که $f(x)$ و $g_i(x)$ و $h_i(x)$ توابع معلوم از x هستند. توجه داریم که در اینجا حداقل یکی از توابع $f(x)$ یا $g_i(x)$ یا $h_i(x)$ غیرخطی هستند. بنابراین در یک مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی ممکن است توابع مربوط به محدودیت‌ها یا تابع هدف و یا هردوی آنها غیرخطی باشند. همچنین ممکن است مسأله فاقد محدودیت باشد و هدف مینیمم یا ماکزیمم کردن یک تابع غیرخطی است. یعنی با یک مسأله بهینه‌سازی غیرخطی بدون محدودیت روبرو شویم.

تذکر:

یک مسأله برنامه‌ریزی خطی همواره دارای محدودیت (قید) است، زیرا اگر در مسأله محدودیت وجود نداشته باشد، یک تابع خطی همواره بی‌کران است ($+\infty$ یا $-\infty$) و این یعنی یک مسأله برنامه‌ریزی خطی زمانی معنی‌دار است که حتماً دارای قید باشد(مقید) ولی یک مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی می‌تواند در دو حالت وجود داشته باشد یعنی می‌تواند هم دارای محدودیت باشد(مقید) و یا اینکه هیچ گونه محدودیتی نداشته باشد (نامقید). بعلاوه بعداً خواهیم دید حل مسأله نامقید، کلید حل مسأله مقید است.

۱-۲ مدل‌سازی چند مسأله کاربردی خطی و غیرخطی

در این بخش به مدل‌سازی چند مسأله در حوزه‌های مختلف می‌پردازیم که به صورت یک مسأله بهینه‌سازی فرمول‌بندی می شوند.

مثال ۱-۱. یک فروشنده می‌خواهد اجناسی را برای فروشگاه خود خریداری کند. لیست اجناس به همراه قیمت آنها و سود حاصل از آنها و همچنین حجمی که اجناس اشغال می کنند، در جدول ۱-۱ آورده شده است.

جدول ۱-۱: لیست اجناس به همراه قیمت و سود حاصل از آنها و حجم آنها

	نام کالا	واحد	قیمت هر واحد	سود فروش هر واحد	حجم هر واحد
۱	شکر	کیلو	۱۲۰	۱۰	۲۰
۲	پنیر فله ای	کیلو	۳۵۰	۲۵	۴۰
۳	پنیر بسته ای	بسته	۴۱۰	۲۷	۵۲
۴	برنج	کیلو	۴۵۰	۲۰	۴۵
۵	پای بسته ای	بسته	۱۰۰۰	۵۰	۷۴
۶	زعفران	بسته	۲۰۰۰	۱۲۰	۲
۷	نوشابه	بسته	۲۳۰	۳۰	۹۰

هدف فروشنده، تهیه اقلام فوق به اندازه‌ای است که سود حاصل از فروش اجناس ماکزیمم شود و در ضمن موارد زیر باید در نظر گرفته شود:

الف) سرمایه فروشنده صدهزار تومان است و لذا هزینه کلیه اقلام خریداری شده نباید از صدهزار تومان بیشتر شود.
ب) به خاطر ملاحظات بهداشتی، مقدار خریداری شده پنیر فله ای نباید از ۳۰ کیلو بیشتر باشد.
ج) به علت محدودیت فضای انبار، حجم کالاهای خریداری شده نباید از ۴۰۰۰ بیشتر شود.
مسأله مطرح شده در بالا، یک مسأله بسیار ساده بهینه‌سازی می‌باشد. برای حل این مسأله ابتدا لازم است مدل ریاضی مسأله استخراج شود. برای این منظور متغیرهای x_i را مقدار واحد خریداری شده از کالای شماره i اُم تعریف می‌کنیم. به عنوان نمونه x_2 مقدار وزن (برحسب کیلوگرم) پنیر فله ای خریداری شده و x_3 تعداد بسته‌های پنیر خریداری شده می‌باشند. توجه شود که دامنه متغیر x_2 هر عدد حقیقی نامنفی است $x_2 \in [0 + \infty)$، در حالی که دامنه متغیر x_3 اعداد طبیعی و صفر می‌باشد و نمی‌تواند یک مقدار کسری را داشته باشد $x_3 \in \{0, 1, 2, ...\}$. در مورد متغیرهای دیگر نیز به طور مشابه می‌توان دامنه را تعریف کرد. با توجه به x_i ها، می‌توان سود را به عنوان تابعی از متغیرهای $x_1, ..., x_7$ به صورت زیر تعریف نمود:

$$f(x_1, ..., x_7) = 10x_1 + 25x_2 + 27x_3 + 20x_4 + 50x_5 + 120x_6 + 30x_7$$

هدف ماکزیمم کردن تابع بالا است. با درنظر گرفتن محدودیت‌های (الف) تا (ج) در مسأله مورد نظر می‌باشد، این محدودیت‌ها را به ترتیب به صورت زیر می‌توان بیان کرد:

$$120x_1 + 350x_2 + 410x_3 + 450x_4 + 1000x_5 + 2000x_6 + 230x_7 \leq 100000$$
$$x_2 \leq 30$$
$$20x_1 + 40x_2 + 52x_3 + 45x_4 + 74x_5 + 2x_6 + 90x_7 \leq 4000$$

در نهایت مسأله فروشنده به صورت زیر مدل می‌شود:

$$\min\ f(x_1, ..., x_7) = 10x_1 + 25x_2 + 27x_3 + 20x_4 + 50x_5 + 120x_6 + 30x_7$$
$$s.t \begin{cases} 120x_1 + 350x_2 + 410x_3 + 450x_4 + 1000x_5 + 2000x_6 + 230x_7 \leq 100000 \\ x_2 \leq 30 \\ 20x_1 + 40x_2 + 52x_3 + 45x_4 + 74x_5 + 2x_6 + 90x_7 \leq 4000 \\ x_1, x_2, x_4 \in [0, +\infty) \quad \text{و} \quad x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \in \{0, 1, 2, ...\} \end{cases}$$

توجه داریم که این مدل، نمونه‌ای از برنامه‌ریزی‌خطی عددصحیح (ILP) است و چون مسأله، فاقد شرط بخش‌پذیری می‌باشد، به‌عنوان برنامه‌ریزی غیرخطی به‌شمار می‌آید.

مثال ۱-۲. مسأله مکان‌یابی یک دکل مخابراتی. یک شبکه رادویی یک شهری قصد دارد تا خدمات و برنامه های خود را به چهار شهر شمالی و جنوبی گسترش دهد. برای ارائه خدمات مناسب، این شبکه به یک دکل مخابراتی انتقال دهنده نیاز دارد که امواج رادیویی را به دکل‌های کوچک‌تر گیرنده‌ای برساند که در این چهار شهر قرار دارند. دکل مخابراتی جدیدی که در نظر گرفته شده قادر است امواج را تا شعاع M کیلومتری به خوبی ارسال کند. بنابراین لازم است محل نصب این دکل با هریک از شهرها حداکثر M کیلومتر فاصله داشته باشد. موقعیت این چهار شهر در جدول ۱-۲ نشان داده شده است:

جدول ۱-۲: موقعیت جغرافیایی چهارشیر

شهر	۱	۲	۳	۴
x	۱۵	۲۰	۴۰	۶۰
y	۵۰	۳۵	۱۵	۳۵

اگر بخواهیم مسأله را طوری مدل کنیم که محل این دکل مخابراتی، کم‌ترین فاصله جمعی ممکن را از این چهار شهر داشته باشد، متغیرهای تصمیم مسأله عبارتند از: (x، فاصله محل نصب دکل تا محور y ها و y، فاصله محل نصب دکل تا محور x ها).
حال، در خصوص تابع هدف با توجه به این که کمینه کردن فاصله نقطه نصب دکل جدید از چهارشهر مدنظر است می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\min\ z =& \sqrt{(۱۵-x)^۲+(۵۰-y)^۲}+\sqrt{(۲۰-x)^۲+(۳۵-y)^۲}\\ &+\sqrt{(۴۰-x)^۲+(۱۵-y)^۲}+\sqrt{(۶۰-x)^۲+(۳۵-y)^۲}\end{aligned}$$

نخستین عبارت تابع هدف، فاصله دکل از محل شهر اول و عبارات بعدی به ترتیب فاصله دکل از محل شهرهای دوم و چهارم است. در مورد محدودیت‌ها نیز با توجه به صورت مسأله، دکل جدید باید در محلی نصب شود که فاصله آن نقطه تا هر یک از شهرها حداکثر M کیلومتر باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\sqrt{(۱۵-x)^۲+(۵۰-y)^۲}&\le M\\ \sqrt{(۲۰-x)^۲+(۳۵-y)^۲}&\le M\\ \sqrt{(۴۰-x)^۲+(۱۵-y)^۲}&\le M\\ \sqrt{(۶۰-x)^۲+(۳۵-y)^۲}&\le M\end{aligned}$$

همان‌طور که از تابع هدف و محدودیت‌های مسأله پیداست، این مسأله غیرخطی است.

مثال ۱-۳. فرض کنید n بازار یا محل عرضه کالا داریم که در هرکدام تقاضایی برای کالای مشخصی وجود دارد. فرض کنید r_j، تقاضا در j اُمین بازار باشد ($j = ۱, ۲, ..., n$). محل استقرار این تقاضاها را که با (a_j, b_j)، $j = ۱, ۲, ..., n$ نشان می‌دهیم مشخص است. می‌خواهیم این تقاضاها را از m انبار برآورده کنیم. به طوری‌که محل این انبارها مشخص نبوده ولی ظرفیت آنها معلوم است. فرض کنید $i = ۱, ۲, ..., m$، c_i ظرفیت این انبارها باشد. هدف تعیین محل این انبارهاست به طوری‌که تقاضا برآورده شود و مجموع فواصل نسبت به مقدار حمل شده از محل بازارها مینیمم شود. برای فرمول‌بندی این مسأله به صورت یک مسأله بهینه‌سازی، فرض کنید (x_i, y_i)، $۱ \leq i \leq m$ محل انبارها باشد و d_{ij} فاصله انبار i تا بازار j باشد. همچنین فرض کنید x_{ij} مقدار کالایی باشد که باید از محل i به محل j حمل شود.
در این صورت مسأله را می‌توان به صورت زیر فرمول‌بندی کرد.

$$\min \sum_i \sum_j x_{ij} d_{ij}$$

$$s.t: \begin{cases} \sum_{i=۱}^{m} x_{ij} = r_j & \text{محدودیت تقاضا} \quad j = ۱, ۲, ..., n \\ \sum_{j=۱}^{n} x_{ij} \leq c_j & \text{محدودیت عرضه} \quad i = ۱, ۲, ..., m \\ x_{ij} \geq ۰ \end{cases}$$

d_{ij} را به روش‌های متعدد می‌توان تعیین نمود که البته به نوع مسیر بستگی دارد. درحالت خاص، اگر محل انبارها مشخص باشد، به مسأله حمل و نقل که نوع مهمی از مسائل برنامه‌ریزی خطی است، تبدیل می‌شود.

مثال ۱-۴. در مسائل حمل و نقل با معلوم بودن میزان عرضه و تقاضا، هدف مینیمم‌سازی هزینه حمل و نقل کالاها از مبدأها به مقصدها است. در این نوع مسائل فرض بر این است که هزینه حمل هر واحد کالا از هر مبدأ به مقصد معین ثابت باشد ولی در عمل این هزینه‌ها ممکن است ثابت نبوده و برای محموله‌های بزرگ تخفیف‌هایی منظور گردد و در نتیجه هزینه حمل x واحد از محصول به صورت یک تابع غیرخطی $c(x)$ خواهد بود.
در صورتی که چنین فرضی در مورد هر مبدأ و مقصد صدق نماید. یعنی هزینه حمل x_{ij} واحد از مبدأ i به مقصد j برابر $c_{ij}(x_{ij})$ باشد. آنگاه مسأله به صورت زیر مدل‌سازی می‌شود که در آن تابع هدف مسأله، غیرخطی است.

$$\min \sum_{i}^{m} \sum_{j}^{n} c_{ij}(x_{ij})$$

$$s.t:\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=s_i & \text{است } i \text{ مقدار عرضه مبدأ } s_i \quad 1\le i\le m\\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\le c_j & \text{است } j \text{ مقدار تقاضای مقصد } d_j \quad 1\le i\le m,\ 1\le j\le n\\ x_{ij}\ge 0\end{cases}$$

مثال ۱-۵. مسأله برنامه‌ریزی تولید (ماکسیمم محصول تولیدی). یک محصول از چهار واحد قطعه A و سه قطعه B تولید می‌شود. قطعات A و B از دو نوع ماده اولیه ساخته می‌شوند که از هر یک ۲۰۰ و ۴۰۰ واحد در اختیار است. سه کارگاه در تولید قطعات A و B مشارکت دارند که هر یک روش متفاوتی برای تولید دارند. جدول ۱-۳ میزان نیاز به مواد اولیه برحسب مقدار تولید و مقادیر تولید شده از هر یک از قطعات A و B را مشخص می‌سازد. اگر

جدول ۱-۳: اطلاعات مسأله برنامه‌ریزی تولید

کارگاه	خروجی در هر بار تولید		ورودی در هر بار تولید	
	قطعه A	قطعه B	ماده اولیه نوع۱	ماده اولیه نوع۲
۱	۴	۵	۲	۴
۲	۶	۳	۳	۵
۳	۲	۶	۵	۹

بخواهیم تعداد دورهای تولید برای هر کارگاه که موجب بیشینه شدن سود می‌شود را به شکل یک مدل برنامه‌ریاضی بنویسیم، می‌توان فرض کرد که x_1، x_2 و x_3 به ترتیب تعداد دورهای تولید برای کارگاه‌های ۱، ۲ و ۳ باشند. در این صورت تعداد کل واحدهای قطعه A که توسط هر سه بخش (کارگاه) تولید می‌شوند، برابر است با $4x_1+6x_2+2x_3$ و تعداد کل واحدهای قطعه B که توسط هر سه کارگاه تولید می‌شوند، برابر خواهد بود با $5x_1+3x_2+6x_3$. اکنون با توجه به اینکه هدف مسأله ماکزیمم‌سازی تعداد کل محصول نهایی است و از طرفی چون هر واحد محصول نهایی از چهار واحد قطعه A و سه واحد قطعه B تشکیل شده است، لذا تعداد کل واحدهای محصول تولید شده برابر است با

$$\min\ \left\{\frac{4x_1+6x_2+2x_3}{4},\frac{5x_1+3x_2+6x_3}{3}\right\}$$

در نهایت می‌توان تابع هدف را به صورت زیر نوشت:

$$\max\ z=\max\left[\min\ \left\{\frac{4x_1+6x_2+2x_3}{4},\frac{5x_1+3x_2+6x_3}{3}\right\}\right]$$

همچنین محدودیت‌های متناظر در خصوص ماده اولیه نوع ۱ و ۲ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$۲x_۱ + ۳x_۲ + ۵x_۳ \leq ۲۰۰ \qquad \text{(ماده اولیه نوع ۱)}$$
$$۴x_۱ + ۵x_۲ + ۹x_۳ \leq ۴۰۰ \qquad \text{(ماده اولیه نوع ۲)}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، تابع هدف این مسأله یک تابع غیرخطی بوده که موجب می‌شود که مسأله نیز غیرخطی شود.

مثال ۱-۶. در نظریه مقدماتی انبارداری اغلب محاسبات برای میزان سفارش مقرون به صرفه انجام می‌شود یعنی تعیین مقداری که باید سفارش داده و در انبار نگهداری شود. برای انجام این کار خواهان بررسی هزینه جایگزینی این سفارشات، هزینه نگهداری هر جزء در انبار و تعیین تقاضای مورد انتظار برای هر جزء هستیم. در حالت معمولی اولین محاسبه برای تعیین میزان سفارش مقرون به صرفه هر جزء که در انبار باید نگهداری شود انجام می‌گیرد. بنابراین برای انبارکردن مقدار متوسط کل باید محدودیتی وجود داشته باشد. فرض کنید x_j اندازه سفارشی باشد که باید تعیین گردد$j = ۱, ۲, ..., n$، هدف مینیمم کردن هزینه کل (C_T) است. برای این منظور، فرض کنید C هزینه ثابت جایگزینی سفارش، D_j تقاضای جزء jاُم، V_j هزینه جزء jاُم، I_p هزینه انبار که درصدی از هزینه هر جزء است و M مقدار ماکزیمم متوسط انبار باشد. می‌خواهیم مقادیری از x_j را بدست آوریم که C_T مینیمم گردد به طوری که برای $x_j \geq ۰$، $\sum_{j=۱}^{n} \frac{۱}{۲} V_j x_j \leq M$. بنابراین مسأله مورد بحث را می‌توان به صورت زیر فرمول‌بندی کرد:

$$min\ C_T = \sum_{j=۱}^{n} \left[\frac{CD_j}{x_j} + \frac{I_p V_j x_j}{۲} \right]$$
$$s.t: \begin{cases} \sum_{j=۱}^{n} V_j x_j \leq M \\ x_j \geq ۰\ ,\ ۱ \leq j \leq n \end{cases}$$

مثال ۱-۷. انتخاب ترکیب سرمایه گذاری با بازده قطعی. امروزه جهت انتخاب گزینه های مناسب سرمایه‌گذاری مدل‌های کامپیوتری، به‌صورت ابزاری متداول در خدمت مدیران حرفه‌ای بورس‌های سهام درآمده‌اند؛ از آنجا که سرمایه گذاران به دو عامل بازدهی سرمایه گذاری‌ها و ریسک اهمیت می‌دهند، بنابراین ترکیب سرمایه گذاری باید طوری انتخاب شود که تحت شرایط موجود بین بازده سرمایه و خطری که متوجه آن است رابطه بهینه‌ای برقرار باشد. فرض کنید که خرید n نوع سهام مختلف تحت بررسی است و متغیر تصمیم x_i معرف تعداد سهام انتخابی نوع i است، چنانچه μ_i و σ_{ij} به ترتیب بیانگر تخمین میانگین و واریانس بازده یک عدد از سهام نوع i باشند در این صورت σ_{ij} که در آن $i = ۱, ۲, ..., n$ و $j = ۱, ۲, ..., n$

است، معرف میزان ریسک می‌باشد. $R(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i R(x)$ میانگین و $V(x)$ کل بازده سرمایه گذاری به‌صورت $V(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$ محاسبه می‌شود. این مسأله را می‌توان به صورت‌های زیر مدل‌سازی کرد:

(الف) مینمم کردن ریسک بطوریکه سرمایه از حد معینی پیروی نکند:

$$\min \sum \sum \sigma_{ij} x_i x_j$$
$$s.t: \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = c \\ \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \geq R \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

و (ب) ماکزیمم نمودن بازدهی به طوری که ریسک از حد معینی تجاوز نکند:

$$\max \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$$
$$s.t: \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = c \\ \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j \leq \sigma \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

می‌توان این مسأله را با تاثیر ریسک در تابع هدف به طوری که بازدهی را ماکزیمم می‌کند، به صورت زیر مدل‌سازی کنیم.

$$\max \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i - \beta \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j \quad \text{یا} \quad \max \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i - \beta \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$$
$$s.t: \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq c \\ x_j \geq 0 \end{cases} \qquad s.t: \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = c \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

پارامتر β میزان تاثیر ریسک در مسأله را تعیین می‌کند. یعنی اگر $\beta = 0$ باشد، آنگاه ریسک اصلاً در نظر گرفته نمی‌شود و اگر β بزرگ انتخاب شود به معنای اهمیت زیاد پایین بودن ریسک سرمایه گذاری است.

مثال ۱-۸. یک کمپانی با سرمایه‌ای به میزان B، امکان n سرمایه گذاری را دارد. فرض کنید x_j نشان دهنده میزان سرمایه گذاری در هریک از این n حالت باشد $j = 1, 2, \ldots, n$. و در هر حالت، میزان سرمایه گذاری مجاز بین دو مقدار l_j و u_j محدود است. همچنین فرض کنید $r_j(x_j)$ مقدار برگشت سرمایه باشد که به صورت یک تابع غیرخطی از مقادیر سرمایه گذاری

شده در هر یک از حالات را نشان دهد، با هدف ماکزیمم کردن کل برگشتی‌های سرمایه می‌توان مسأله را به صورت زیر فرمول‌بندی نمود.

$$\max R = \sum_{j=1}^{n} r_j(x_j)x_j$$
$$s.t: \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_j \leq B \\ l_j \leq x_j \leq u_j \qquad j = 1, 2, ..., n \end{cases}$$

مثال ۱-۹. یک تاجر دارای ۵۰۰ تومان پول نقد در مقابل دو پیشنهاد سرمایه‌گذاری می‌باشد بطوری که متوسط بهره سالیانه و مورد انتظار از سرمایه‌گذاری یکم برابر با ۲۰ درصد و این متوسط برای سرمایه‌گذاری دوم برابر با ۱۶ درصد خواهد بود. تاجر مزبور مایل است سرمایه‌گذاری را به نحوی متقبل شود که دارای ماکزیمم بهره‌وری ممکن گردیده و در عین حال ریسک سرمایه گذاری (یعنی واریانس مجموع بهره‌وری‌های سالیانه) برای او به حداقل ممکن کاهش یابد. فرض کنید x_1 و x_2 به ترتیب نشان دهنده مبلغ سرمایه‌گذاری برای پیشنهاد اول و دوم باشند. مسأله عبارتست از

$$\max Z = 20x_1 + 16x_2 - \beta(\text{واریانس مجموع بهره وری})$$
$$s.t \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 500 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

چناچه واریانس مجموع بهره‌وری برابر باشد با $2x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2$ تابع هدف به صورت زیر تبدیل می‌شود، که در β مشخص کننده میزان اهمیت دادن به ریسک است.

$$\max \ Z = 20x_1 + 16x_2 - \beta(2x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2)$$

مثال ۱-۱۰. احداث بزرگراه. فرض کنید می خواهیم جاده ای را روی یک زمین ناهموار احداث کنیم هزینه ساخت جاده متناسب با مقدار خرابی و لکه های اضافی (یا جابجا شدن) است. فرض کنید T طول جاده و $C(t)$ ارتفاع زمین در نقطه $t \in [0, T]$ باشد. همچنین $y(t)$ ارتفاع جاده در دست احداث در هر نقطه t مورد نظر است، که مجهول می‌باشد. توجه داریم که شیب جاده از حد معینی مانند b_1 نباید تجاوز کند و تغییرات شیب نیز از b_2 تجاوز نکند، همچنین $y(T) = b$ و $y(0) = a$. بنابراین مسأله به صورت زیر مدل‌سازی می‌شود:

$$\min \int_0^T |y(t) - C(t)| dt$$

$$s.t:\begin{cases} |y'(t)|\leq b_1 & t\in[0,T]\\ |y''(t)|\leq b_2 & t\in[0,T]\\ y(0)=a, & y(t)=b\end{cases}$$

اگر $c(t)$ بزرگتر از $y(t)$ باشد، باید خاک برداری و اگر $c(t)$ از $y(t)$ کمتر باشد باید خاک‌ریزی کنیم و اگر $c(t)=y(t)$ احتیاج به خاک برداری یا خاک‌ریزی نداریم. حال برای آنکه مسأله را بتوانیم حل کنیم، انتگرال و مشتق را تقریب می زنیم و فرض کنیم پس از تقریب داشته باشیم y و y' به ترتیب به y_1 و y_2 میل کنند. حال فرض کنیم طول جاده به K فاصله تقسیم شده باشد و برای راحتی، طول فاصله ها را برابر ۱ درنظر می‌گیریم. در این صورت مسأله به صورت زیر مدل‌سازی می‌شود.

$$\min\sum_{k=1}^{K}|y_k-C_k|$$

$$\begin{cases} y_{1,k}-y_{1,k-1}=y_{2,k-1} & k=1,...,K\\ -b_1\leq y_{2,k}\leq b_1 & k=1,...,K-1\\ -b_2\leq y_{2,k}-y_{2,k-1}\leq b_2 & k=1,...,K-1\\ y_{1,0}=a, \quad y_{1,k}=b\end{cases}$$

مثال ۱-۱۱. یک شرکت تولیدی دو نوع کالا تولید می‌نماید بطوری که توابع تقاضا و هزینه تولید برای آنها به صورت زیر است:

$x_1=1500-5P_1$ تابع تقاضای ماهیانه از کالای اول

$x_2=3800-10P_2$ تابع تقاضای ماهیانه از کالای دوم

$C_1=200x_1+0/1x_1^2$ تابع هزینه کل تولید برای کالای اول

$C_2=300x_2+0/1x_2^2$ تابع هزینه کل تولید برای کالای دوم

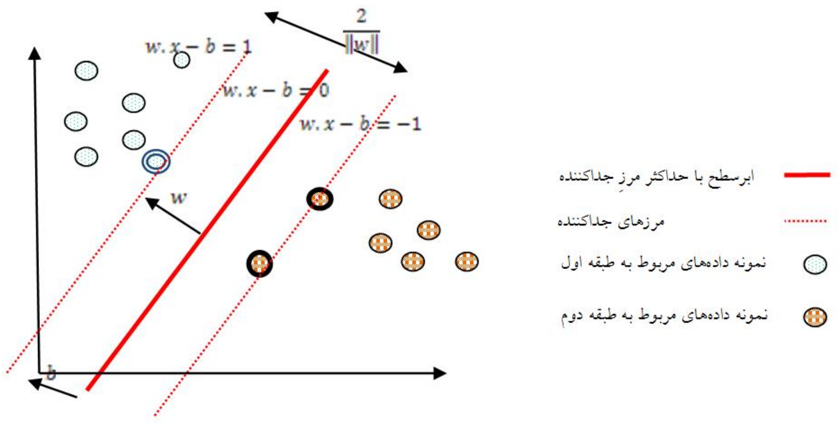
چنانچه ماکزیمم مجموع مجذورات حجم تولید از دو کالا برابر با ۵۰۰۰۰ واحد کالا باشد، آن‌گاه:

$$\begin{aligned}\text{درآمد کل از فروش دو کالا} &= R=P_1x_1+P_2x_2\\ &= (300-0/2x_1)x_1+(380-0/1x_2)x_2\\ \text{مجموع سودآوری حاصل از فروش دو کالا} &= R-(C_1+C_2)\\ &= 100x_1-0/3x_1^2+80x_2-0/2x_2^2\end{aligned}$$

بنابراین مسأله عبارتست از:

$$\max P = 100x_1 - 0/3x_1^2 + 80x_2 - 0/2x_2^2$$
$$s.t: \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 50000 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

مثال ۱-۱۲. روش طبقه‌بندی ماشین بردار پشتیبان. فرض کنیم مجموعه نقاط داده $\{(x_1, c_1), (x_2, c_2), ..., (x_n, c_n)\}$ را در اختیار داریم و می‌خواهیم آنها را به دو طبقه $c_i = \{-1, 1\}$ تفکیک کنیم. هر x_i یک بردار p بعدی از اعداد حقیقی است که در واقع همان متغیرهای بیانگر رفتار نرم افزار هستند.
روش‌های طبقه بندی خطی، سعی دارند که با ساختن یک ابرسطح (که عبارت است از یک معادله خطی)، داده‌ها را از هم تفکیک کنند. روش طبقه بندی ماشین بردار پشتیبان که یکی از روش‌های طبقه‌بندی خطی است، بهترین ابرسطحی را پیدا می‌کند که با حداکثر فاصله[۵]، داده‌های مربوط به دو طبقه را از هم تفکیک کند. به منظور درک بهتر مطلب، در شکل ۱-۱ تصویری از یک مجموعه داده متعلق به دو کلاس نشان داده شده که روش ماشین بردار پشتیبان بهترین ابرسطح را برای جداسازی آنها انتخاب می‌کند. در این شکل داده‌ها دو بعدی



شکل ۱-۱: ابرسطح با حداکثر مرزِ جداکننده به همراه مرزهای جداکننده برای طبقه بندی نمونه داده‌های مربوط به دو طبقه متفاوت. نمونه‌های قرار گرفته بر روی مرزها بردارهای پشتیبان نام دارند.

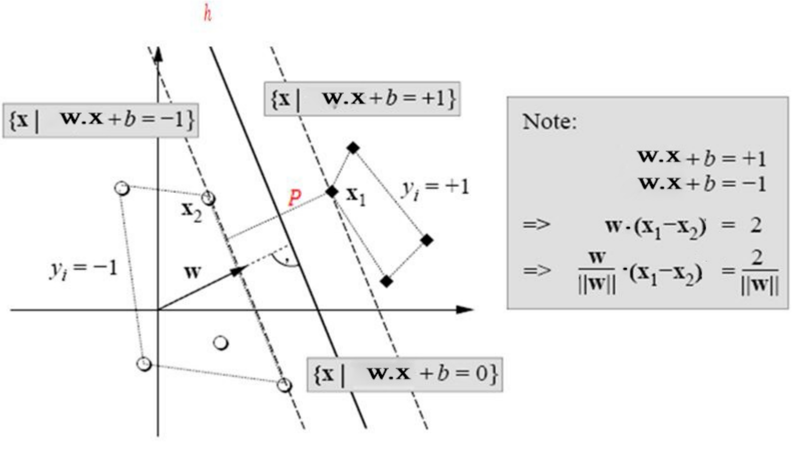
هستند یعنی هر داده تنها از دو متغیر تشکیل شده است.
در اینجا می‌خواهیم نحوه ساخت ابرسطح جداکننده را بر روی یک مثال با جزئیات شرح دهیم.

[۵] maximum margin

تصویر دقیقی از نحوه تشکیل ابرسطح جداکننده توسط ماشین بردار پشتیبان در شکل ۱-۲ نشان داده شده است.
b عرض از مبدا برای ابرسطح با حداکثر مرز جداکننده است.
اگر از b صرف‌نظر شود، پاسخ تنها ابرسطح‌هایی هستند که از مبدا می‌گذرند. فاصله عمودی ابرسطح تا مبدا با تقسیم قدرمطلق مقدار پارامتر b برطول w بدست می‌آید. ایده اصلی این است که یک جداکننده مناسب انتخاب شود. منظور، جداکننده‌ای است که بیشترین فاصله را با نقاط همسایه از هر دو طبقه دارد. این جواب درواقع بیشترین مرز را با نقاط مربوط به دو طبقه مختلف دارد و می‌تواند با دو ابرسطح موازی که حداقل از یکی از نقاط دو طبقه عبور می‌کنند، کران‌دار شود. این بردارها، **بردارهای پشتیبان** نام دارند. فرمول ریاضی این دو ابرسطح موازی که مرز جداکننده را تشکیل می‌دهند در عبارات(۱) و (۲) نشان داده شده است:

$$w.x + b = +۱ \quad (۱)$$

$$w.x + b = -۱ \quad (۲)$$



شکل ۱-۲: نحوه ساخت ابرسطح جداکننده بین دو طبقه داده در فضای دو بعدی

نکته قابل توجه این است که اگر داده‌های تعلیمی به صورت خطی تفکیک‌پذیر باشند، می‌توان دو ابرسطح مرزی را به گونه‌ای انتخاب کرد که هیچ داده‌ای بین آنها نباشد و سپس فاصله بین این دو ابرسطح موازی را به حداکثر رساند. با بکارگیری قضایای هندسی، فاصله این دو ابرسطح عبارت است از $\frac{۲}{||w||}$ ، پس باید $||w||$ را به حداقل رساند. همچنین باید از قرار گرفتن نقاط داده در ناحیه درون مرز جلوگیری کرد، برای این کار یک محدودیت ریاضی به

تعریف فرمال اضافه می‌شود. برای هر i با اعمال محدودیت‌های زیر اِطمینان حاصل می‌شود که هیچ نقطه‌ای در مرز قرار نمی‌گیرد:

$$w.x_i + b \geq +۱ \qquad \text{برای داده‌های مربوط به طبقه اول} \qquad (۳)$$

$$w.x_i - b \leq -۱ \qquad \text{برای داده‌های مربوط به طبقه دوم} \qquad (۴)$$

می‌توان این محدودیت را برای $۱ \leq i \leq n$، به صورت $c_i(w.x_i + b) \geq ۱$ نشان داد. لذا مسأله بهینه‌سازی بدین شکل تعریف می‌شود:

$$\min \ \|w\|$$
$$s.t: \quad c_i(w.x_i + b) \geq ۱, \qquad ۱ \leq i \leq n$$

۱-۳ جواب بهینه مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی

می‌دانیم که الگوریتم جامعی که بتواند به تنهایی همه مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی را حل کرده و به جواب بهینه[۶] برسد و یا تقریب مناسبی از آن را بدهد، وجود ندارد. به همین خاطر حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی عموماً بسیار پیچیده‌تر از مسائل برنامه‌ریزی خطی است. برای حالات خاص این‌گونه مسائل، الگوریتم‌های متعددی ارائه شده‌اند که با این الگوریتم‌ها میتوان بعضی از مسائل را حل کرده و به جواب بهینه (یا نزدیک بهینه) رسید. باید توجه داشت که اکثر این الگوریتم ها نیز به نوعی از روش سیمپلکس استفاده می‌کنند. برای تعریف جواب بهینه ابتدا حالتی را در نظر بگیرید که مسأله بدون قید[۷] باشد. در این حالت مدل کلی (۱-۱) به پیدا کردن ماکزیمم (مینیمم) تابع $f(X) = f(x_۱, ..., x_n)$ محدود می‌شود. در این حالت دو نوع ماکزیمم (مینیمم) می‌توان تعریف کرد.

۱-۳-۱ اکسترمم نسبی

تابع حقیقی f با دامنه D در R^n را در نظر بگیرید. گوییم تابع f در نقطه $x^* \in D$ دارای **ماکزیمم نسبی** است، هرگاه عدد حقیقی $\delta > ۰$ وجود داشته باشد بطوری که به ازای هر $x \in D$ و $||x - x^*|| < \delta$ داشته باشیم: $f(x^*) \geq f(x)$. به عبارتی دیگر:

$$\forall x \,(x \in D \quad \text{و} \quad ||x - x^*|| < \delta \Rightarrow f(x^*) \geq f(x))$$

[۶] Optimal Solution
[۷] Unconstraint

اگر در نامساوی بالا بجای$f(x^*) \geq f(x)$ رابطه $f(x^*) > f(x)$ جایگزین شود آنگاه تابع f در نقطه $x^* \in D$ دارای **ماکزیمم نسبی اکید**[۸] است.
همچنین تابع حقیقی f با دامنه D درR^n را در نظر بگیرید. گوییم تابع f در نقطه $x^* \in D$ دارای **مینیمم نسبی** است، هرگاه عدد حقیقی$\delta > 0$ وجود داشته باشد بطوری که به ازای هر $x \in D$ و $||x - x^*|| < \delta$ داشته باشیم: $f(x^*) \leq f(x)$.به عبارتی دیگر:

$$\forall x(x \in D \quad \text{و} \quad ||x - x^*|| < \delta \Rightarrow f(x^*) \leq f(x))$$

اگر در نامساوی بالا بجای$f(x^*) \leq f(x)$ رابطه $f(x^*) < f(x)$ جایگزین شود آنگاه تابع f در نقطه $x^* \in D$ دارای **مینیمم نسبی اکید**[۹] است.

۱-۳-۲ اکسترمم مطلق

گوییم تابع حقیقی f در نقطه$x^* \in D$دارای **ماکزیمم مطلق** است هرگاه به ازای هر $x \in D$ داشته باشیم: $f(x^*) \geq f(x)$. اگر رابطه $f(x^*) > f(x)$ جایگزین رابطه $f(x^*) \geq f(x)$ شود، آنگاه تابع f در نقطه $x^* \in D$ دارای **ماکزیمم مطلق اکید** است. همچنین، گوییم تابع حقیقی f در نقطه$x^* \in D$دارای مینیمم مطلق است هرگاه به ازای هر $x \in D$، داشته باشیم $f(x^*) \leq f(x)$. اگر رابطه $f(x^*) < f(x)$ جایگزین $f(x^*) \leq f(x)$ شود، آنگاه تابع f در نقطه $x^* \in D$ دارای مینیمم مطلق اکید[۱۰] است.

۱-۳-۳ جواب‌های شدنی، بهینه سراسری و موضعی برای مسائل بهینه‌سازی

مسأله بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{array}{ll} \min f(x_1, ..., x_n) & \text{تابع هدف} \\ s.t: \begin{cases} g_i(x_1, ..., x_n) \leq 0 \\ h_i(x_1, ..., x_n) = 0 \\ x_1 \in D_1, ..., x_n \in D_n \end{cases} & \begin{array}{l} \text{قیود نامساوی} \\ \text{قیود تساوی} \\ \text{قیود دامنه ای} \end{array} \end{array}$$

متغیرهای $x_1, ..., x_n$ که $x_i \in D_i$، یک **جواب شدنی** [۱۱] یا نقطه شدنی برای مسأله نامیده می شوند، هرگاه در تمامی قیود مسأله صدق کند. مجموعه تمامی جواب های شدنی یا نقاط

[۸] Strong Relative Maximum
[۹] Strong Local Minimum
[۱۰] Strict Global Minimum
[۱۱] Feasible Solution

شدنی به **ناحیه شدنی** [۱۲] یا مجموعه شدنی موسوم می‌باشد. ناحیه شدنی را با Ω نشان می‌دهیم و داریم:

$$\Omega = \{x \in D | g(x) \leq \circ, h(x) = \circ\}$$

اگر در یک مسأله بهینه‌سازی Ω تهی باشد، آنگاه گوییم که مسأله نشدنی است. نشدنی شدن یک مسأله به علت ناسازگار بودن قیود مسأله می‌باشد. عموماً Ω یک مجموعه با بی‌نهایت عضو می‌باشد. البته این امکان وجود دارد که Ω فقط دارای یک یا دو یا چند عضو باشد.
جواب بهینه [۱۳] یا به طور خلاصه جواب برای مسأله بهینه‌سازی نقطه یا نقاطی در Ω می‌باشد که دارای کمترین مقدار تابع هدف (چنانچه مسأله ماکزیمم‌سازی باشد، بیشترین مقدار تابع هدف) در Ω می‌باشد. به عبارت دقیق تر $x^* \in \Omega$ را یک جواب بهینه برای مسأله می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $x \in \Omega$ داشته باشیم $f(x^*) \leq f(x)$.
اگر در عبارت فوق نامساوی به صورت اکید برقرار باشد، آنگاه x^* را یک **جواب بهینه اکید** [۱۴] می‌نامیم. توجه شود که در تعریف فوق مقدار تابع f در x^* با تمامی اعضای Ω مقایسه گردید. به عبارت دیگر مقدار تابع f در x^* از تمامی اعضای Ω نابیشتر یا کمتر است، به این لحاظ x^* به **جواب بهینه سراسری** [۱۵] نیز موسوم می‌باشد. ممکن است یک مسأله بهینه‌سازی اصلاً جواب سراسری نداشته باشد و یا ممکن است دارای چندین جواب سراسری باشد.
برای مسائل بهینه‌سازی نوع دیگری از جوابها موسوم به جواب های بهینه موضعی یا محلی نیز در نظر گرفته می‌شود. **جواب بهینه موضعی** [۱۶] یا به طور خلاصه جواب موضعی یک جواب شدنی است که در یک ناحیه در اطراف خود بهینه است و نه در کل ناحیه شدنی Ω. به عبارت دقیق تر x^* را یک جواب موضعی می‌نامیم هرگاه $\varepsilon > \circ$ موجود باشد، به طوری که به ازای هر $x \in \Omega$ که فاصله آن از x^* کمتر از ε باشد، داشته باشیم $f(x^*) \leq f(x)$.
به طور مشابه، هنگامی که نامساوی فوق به صورت اکید بر قرار باشد، جواب موضعی را جواب موضعی اکید می نامند. هر جواب بهینه سراسری یک جواب بهینه موضعی می‌باشد. ولی عکس آن درست نمی باشد. ممکن است یک مسأله مینیمم موضعی داشته باشد ولی مینیمم سراسری نداشته باشد.
توجه شود که در مورد جواب موضعی یا سراسری یک مسأله بهینه‌سازی، حالاتی که ممکن است اتفاق بیافتد، عبارتند از:
(الف) نشدنی باشد و بنابراین اصلا جواب بهینه ای نداشته باشد. (ب) شدنی باشد اما جواب

[۱۲] Feasible Region (set)
[۱۳] Optimal Solution
[۱۴] Strict Optimal Solution
[۱۵] Global Optimal Solution
[۱۶] Local Optimal Solution

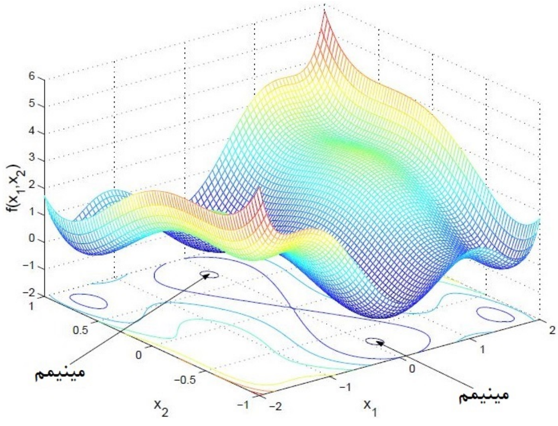
نداشته باشد. (ج) یک جواب منحصر به فرد داشته باشد. (د) تعداد متناهی جواب داشته باشد. (ه) بی نهایت جواب داشته باشد.

مثال ۱-۱۳. مسأله زیر را در نظر بگیرید (این تابع هدف را تابع کوهان‌دار [۱۷] می‌نامند).

$$\min \quad x_1^2(4 - 2.1x_1^2 + \frac{1}{3}x_1^4) + x_1x_2 + x_2^2(-4 + 4x_2^2)$$

به طوری که دارای محدودیت‌های $-2 \le x_1 \le 2$ و $-1 \le x_2 \le 1$ است. توجه داریم که ناحیه شدنی جواب به صورت مجموعه زیر است:

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : -2 \le x_1 \le 2, -1 \le x_2 \le 1\}$$



شکل ۱-۳: مثالی از برنامه‌ریزی غیرخطی با تابع هدف تابع کوهان‌دار

همانطور که در شکل ۱-۳ مشاهده می‌کنید، این مسأله دارای دو جواب بهینه با مقادیر $(0.0898, -0.717)$ و $(-0.0898, 0.717)$ است. (روش‌های حل این نوع مسائل در فصل های بعدی ارائه خواهد شد).

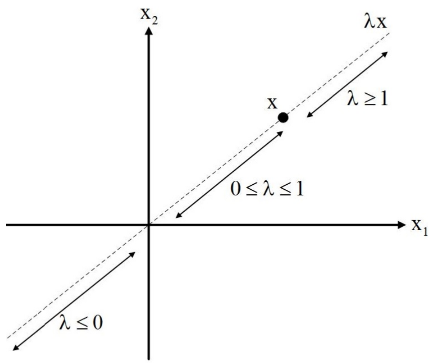
۱-۴ مجموعه های محدب

تعریف ۱-۱۴. گوییم نقطه (بردار) b را به صورت **ترکیب خطی** نقاط (بردارهای) $x_1, x_2, \dots, x_k$ نوشته‌ایم، هرگاه برای هر $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, k)$ داریم:

[۱۷] Humpback function

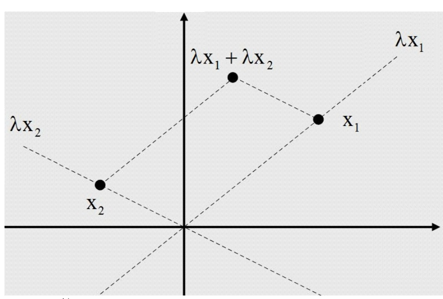
$b = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k$ مجموعه تمام ترکیب‌های خطی نقاط (بردارهای) $x_1, x_2, \dots, x_k$ را **پوسته خطی** آنها گوییم.

مثال ۱-۱۵. تمام ترکیبات خطی (پوسته خطی) یک نقطه مانند x در $\mathbb{R}^n$ به صورت λx می‌باشند که λ یک عدد حقیقی است و از نظر هندسی خط واصل نقطه x و مبدأ است.



شکل ۱-۴: پوسته خطی یک نقطه

مثال ۱-۱۶. تمام ترکیب‌های خطی (پوسته خطی) دو نقطه x_1 و x_2 در فضای $\mathbb{R}^2$ به صورت $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ می‌باشد که λ_1 و λ_2 اعدا حقیقی می‌باشند و می‌دانیم $\lambda_1 x_1$ خط واصل x_1 و مبدأ است و $\lambda_2 x_2$ خط واصل x_2 و مبدأ است. بنابراین برای بدست آوردن $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ که $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ باید نقاط روی این دوخط را باهم جمع کنیم. شکل ۱-۵ پوسته خطی دو نقطه در $\mathbb{R}^2$ را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۵: پوسته خطی دو نقطه در $\mathbb{R}^2$

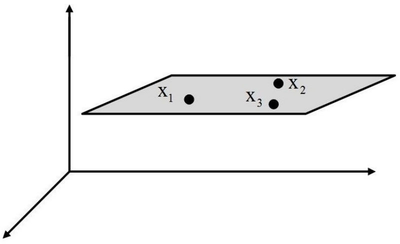
تعریف ۱-۱۷. گوییم نقطه (بردار) b را به صورت **ترکیب آفینی** نقاط (بردارهای)

$x_۱, x_۲, ..., x_k$ نوشته ایم، هرگاه برای هر $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ($i = ۱, ..., k$) داریم:

$$b = \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_j = \lambda_۱ x_۱ + \lambda_۲ x_۲ + ... + \lambda_k x_k$$

به طوری که $\lambda_۱ + \lambda_۲ + ... + \lambda_k = ۱$ برقرار باشد. مجموعه تمام ترکیب های خطی نقاط (بردارهای) $x_۱, x_۲, ..., x_k$ را **پوسته آفینی** آنها گوییم.

مثال ۱-۱۸. پوسته آفینی یک نقطه، خود نقطه است؛ پوسته آفینی نقاط $x_۱$ و $x_۲$ خط واصل این دو نقطه است؛ پوسته آفینی نقاط $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ در $\mathbb{R}^۲$ کل فضای $\mathbb{R}^۲$ است؛ پوسته آفینی نقاط $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ در $\mathbb{R}^۳$ صفحه گذرنده از این سه نقطه است.



شکل ۱-۶: پوسته آفینی سه نقطه در $\mathbb{R}^۳$

تعریف ۱-۱۹. فرض کنید $x_۱, x_۲, ..., x_k$، k بردار در فضای $\mathbb{R}^n$ باشند، بردار b یک **ترکیب محدب** از بردارهای $x_۱, x_۲, ..., x_k$ است هرگاه برای هر $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ($i = ۱, ..., k$) داریم:

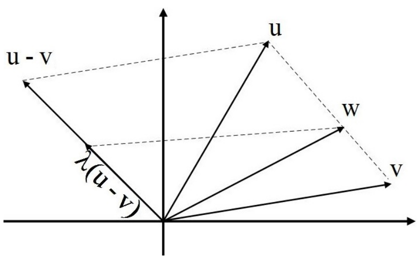
$$b = \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_j = \lambda_۱ x_۱ + \lambda_۲ x_۲ + ... + \lambda_k x_k$$

به شرطی که λ_jها نامنفی و $\sum_{i=۱}^{k} \lambda_i = ۱$ باشند. مجموعه تمام ترکیب‌های محدب نقاط (بردارهای) $x_۱, x_۲, ..., x_k$ را **پوسته محدب** آنها گوییم.

مثال ۱-۲۰. ترکیب محدب نقاط $x_۱$ و $x_۲$ در $\mathbb{R}^n$ به صورت $\lambda x_۱ + (۱ - \lambda) x_۲$ نوشته می‌شود ($\lambda = \lambda_۱$ و $\lambda_۲ = ۱ - \lambda$ پس $\lambda_۱ + \lambda_۲ = ۱$) و از نظر هندسی ترکیب محدب دو نقطه به صورت پاره خط واصل آن دو نقطه می‌باشد.

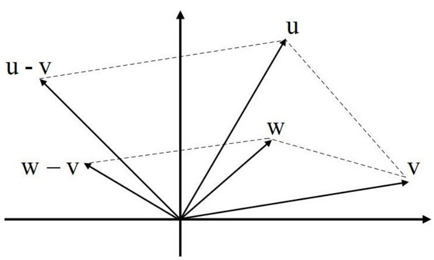
قضیه ۱-۲۱. هر نقطه واقع بر روی پاره خط بین دو نقطه در $\mathbb{R}^n$ را می‌توان به‌صورت ترکیب محدب آن در نقطه بیان کرد و بالعکس هر نقطه که می‌تواند بر حسب ترکیب محدبی از دو نقطه در $\mathbb{R}^n$ بیان شود بر روی پاره خط واصل بین آن دو نقطه قرار دارد.

اثبات. دو نقطه دلخواه را با u و v نمایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم نقطه w بر روی پاره خط واصل بین دو نقطه u و v واقع باشد این پاره خط با خط تعریف شده توسط $u - v$ موازی می‌باشد.



شکل ۱-۷: ترکیب خطی u و v.

پس $w = v + \lambda(u - v)$ یا $w = \lambda u + (1 - \lambda)v$. بنابراین w به‌صورت یک ترکیب محدب از u و v است. در این حالت $w = \lambda u + (1 - \lambda)v$ یا $w - v = \lambda(u - v)$ را داریم که در آن $0 \leq \lambda \leq 1$ است؛ بنابراین بردار $w - v$ مضربی مثبتی از بردار $u - v$ می‌باشد و این بردار نمی تواند تصویری نظیر تصویر رسم شده در شکل ۱-۸ داشته باشد. بردار $w - v$ باید در امتداد $u - v$ منطبق باشد. چون پاره خط واصل بین u و v و پاره خط واصل بین w و v به ترتیب با خط‌های تعریف شده توسط $u - v$ و $w - v$ موازی می‌باشند. پس w باید بر روی پاره خط واصل بین u و v قرار داشته باشد. ■



شکل ۱-۸: بردارهای $u - v$ و $w - v$.

مثال ۱-۲۲. پوسته محدب x_1، x_2 و x_3 در $\mathbb{R}^2$ مثلثی با رئوس x_1، x_2 و x_3 و نقاط درون آن است.

تعریف ۱-۲۳. فرض کنید $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ باشند، خطی را که از این نقاط میگذرد به‌صورت $\{x | x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 \ \ , \lambda \in \mathbb{R}\}$ تعریف می‌شود.