به نام خدا

آمادگی کنکور ریاضی دهم

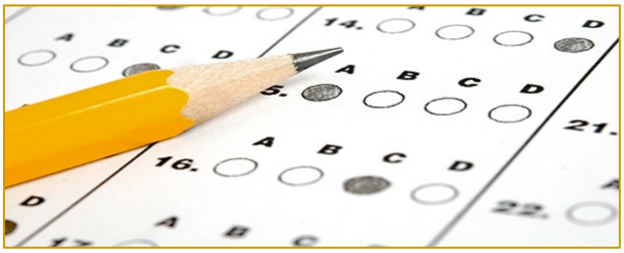
مولف :

فرهاد شعبانی

انتشارات بامن
(با همکاری چاپ و نشر ایران)
۱۴۰۱

سرشناسه : شعبانی، فرهاد، ۱۳۶۶–
عنوان و نام پدیدآور : آمادگی کنکور ریاضی دهم/مولف فرهاد شعبانی.
مشخصات نشر : انتشارات با من (با همکاری سامانه اطلاع رسانی چاپ و نشر ایران)، ۱۴۰۱.
مشخصات ظاهری : ۳۱۱ ص.: مصور (بخشی رنگی)، جدول، نمودار.
شابک : ۶-۶۵-۸۷۵۱-۶۰۰-۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی : فیپا
یادداشت : کتابنامه.
موضوع : آموزش ریاضیات – کنکور – ریاضی پایه دهم
رده بندی کنگره : TK۲۵۵۲
رده بندی دیویی : ۶۲۱/۳۱۵
شماره کتابشناسی ملی : ۹۰۲۷۰۷۷
اطلاعات رکورد کتابشناسی : فیپا

نام کتاب : آمادگی کنکور ریاضی دهم
مولف : فرهاد شعبانی
ناشر : بامن (با همکاری سامانه اطلاع رسانی چاپ و نشر ایران)
صفحه آرایی، تنظیم و طرح جلد : پروانه مهاجر
تیراژ : ۱۰۰۰ جلد
نوبت چاپ : اول – ۱۴۰۱
چاپ : مدیران
قیمت : ۵۰۰۰۰۰ تومان
فروش نسخه الکترونیکی – کتاب‌رسان :
https://chaponashr.ir/ketabresan
شابک : ۶-۶۵-۸۷۵۱-۶۰۰-۹۷۸
تلفن مرکز پخش : ۰۹۱۲۰۲۳۹۲۵۵
www. chaponashr. ir



آمادگی کنکور

ریاضی دهم

کنکور
ریاضی دهم

۱

مجموعه، الگو و دنباله

۱ زیر مجموعه‌های $\mathbb{R}$

مجموعه‌ی اعداد گویا، توسط عددهای صحیح ساخته می‌شود:

$$\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b}:\ a,b\in\mathbb{Z}\ ,\ b\neq ۰\}$$

نکته ۱

مواردی ساده:

- چون تمام عددهای صحیح، گویا هم محسوب می‌شوند، پس:

$$\mathbb{N}\subseteq W\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$$

- برخی عددهای رادیکالی پس از ساده شدن به صورت گویا تبدیل می‌شوند، بنابراین این نوع عددهای رادیکالی، گویا هستند. برای نمونه؛

$$\sqrt{۶۴}=۸\in\mathbb{Q}\quad \text{و}\quad \sqrt{\frac{۹}{۴۹}}=\frac{۳}{۷}\in\mathbb{Q}$$

اعداد گنگ:

اعداد غیر گویا، یعنی عددهای با شرط زیر گنگ هستند:

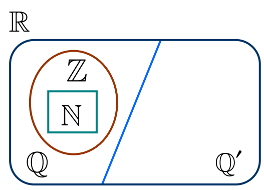
هر عددی که نتوان آن را به صورت تقسیم دو عدد صحیح نوشت.

بنابراین:

مجموعه‌ی اعداد گنگ دقیقاً $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ است که آن را با $\mathbb{Q}'$ (گاهی: $\mathbb{Q}^c$) نشان می‌دهیم.

بعلاوه:

اعداد حقیقی مجموعه‌ی متشکل از تمام عددهای گویا و گنگ است: $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$



اگر $A=\mathbb{Q}'\cup\mathbb{Z}$، $B=\mathbb{Q}-\mathbb{N}$ و $C=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ باشد، کدام مورد نادرست است؟

❶ $A\cup B=\mathbb{R}$
❷ $A\cap C=\mathbb{Q}'$
❸ $C-A=\mathbb{Q}$
❹ $C-B=\mathbb{Q}'$

گزینه ۳

باید هر مورد بررسی شود. در بررسی گزینه‌ی سوم:

عددهای صحیح در C نیستند، پس در $C-A$ نیز قرار ندارند و در نتیجه $C-A$ شامل تمام عددهای گویا نیست.

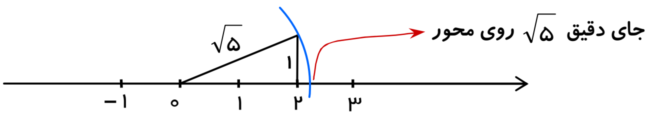
توجه کنید:

آشنایی با نمونه‌های زیر از اعداد گنگ گاهی مفید است:

- عددهای رادیکالی نظیر $\sqrt{۲}$، $\sqrt[۳]{۹}$ و $\sqrt{\frac{۸}{۳}}$ که ساده نمی‌شوند.
- عددهایی نظیر $\sqrt{۳}-۲$ و $\sqrt{۲}+۱$ که از جمع و تفریق یک عدد گنگ و یک عدد گویا بدست می‌آیند.
- عدد π که تقریباً برابر ۳/۱۴ است و در محاسبه‌ی محیط و مساحت دایره بکار می‌رود.

نمایش اعداد گنگ:

بسیاری از عددهای گنگ را می‌توان توسط رابطه‌ی فیثاغورس روی محور مشخص کرد. برای نمونه، نمایش عـدد $\sqrt{۵}$ روی محور را ببینید:



توجه داشته باشید:

نکته ۲

بین هر دو عدد دلخواه:

بی‌شمار عدد گویا و بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد.

کدام عبارت صحیح نیست؟

❶ بین هر دو عدد گویا بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد.

❷ بین هر دو عدد گنگ بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

❸ بین هر دو عدد گویا بی‌شمار عدد صحیح وجود دارد.

❹ بین هر دو عدد صحیح بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

گزینه ۳

با توجه به نکته‌ی قبل، موارد اول، دوم و چهارم درست هستند. اما برای نمونه:

بین دو عدد گویای $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۳}$ هیچ عدد صحیحی وجود ندارد.

پس مورد سوم نادرست خواهد بود.

زیرمجموعه‌های مهم دیگری از $\mathbb{R}$ را ببینید:

بازه‌های اعداد:

❖ بازه‌های کران‌دار:

ابتدا و انتهای این بازه‌ها با دو عدد مشخص می‌شود. مانند:

بازه‌ی باز $\{x \mid x\in \mathbb{R}\ ,\ a<x<b\}=(a,b)$

بازه‌های نیم‌باز $[a,b)$ و $(a,b]$ و بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ به صورت مشابه تعریف می‌شوند. مانند:

$$\{x \mid x\in \mathbb{R}\ ,-۱\le x<۳\}=[-۱,۳)$$

❖ بازه‌های بی‌کران:

این بازه‌ها از یک یا هر دو طرف تا بی‌نهایت ادامه دارند. مانند:

$\{x\in \mathbb{R} \mid x>a\}=(a,+\infty)$

سایر بازه‌های بی‌کران به صورت مشابه بیان می‌شوند: $[a,+\infty)$ و $(-\infty,a)$ و $(-\infty,a]$.

مورد خاص:

مجموعه تمام اعداد حقیقی $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

اگر رابطه‌ی $[a,b]\cap[-۳,a+۲]=[-۲,a+۱]$ برای بازه‌ها برقرار باشد، حاصل‌ضرب a و b کدام است؟

❶ ۶ ❷ -۶ ❸ ۲ ❹ -۲

گزینه ۳

چون اشتراک دو بازه از -۲ شروع شده است، پس a در سمت راست -۳ قرار داشته و مقدار آن -۲ بوده است:

$$a=-۲ \ \rightarrow\ [-۲,b]\cap[-۳,۰]=[-۲,-۱]$$

به طور مشابه، b در سمت چپ ۰ قرار داشته و مقدار آن -۱ بوده است. لذا:

$$ab=(-۲)(-۱)=۲$$

توجه:

برای محاسبات روی بازه‌ها، مانند اجتماع و اشتراک و . . . ، می‌توانید از نمایش روی محور کمک بگیرید.

اگر $m<-۱$ باشد، چند عدد صحیح در مجموعه‌ی $\left[\frac{۱}{m},-m\right]\cap\left[m,-\frac{۱}{m}\right]$ قرار دارد؟

❶ صفر ❷ ۱ ❸ ۲ ❹ نامشخص

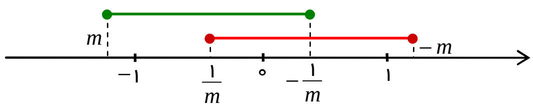
گزینه ۲

با شرط $m<-۱$:

- عدد $-\frac{۱}{m}$ بین ۰ و ۱ قرار داشته و عدد $\frac{۱}{m}$ بین ۰ و -۱ قرار می‌گیرد. (مثلاً برای $m=-۲$ داریم: $\frac{۱}{m}=-\frac{۱}{۲}$ و $-\frac{۱}{m}=\frac{۱}{۲}$)

0916 992 5753 farhad.shabani66

- عدد $-m>۱$ است.



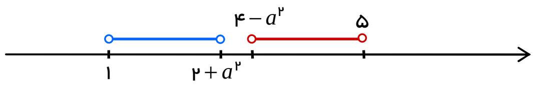
فقط عدد صفر همیشه در اشتراک قرار دارد.

اگر $(۴-a^۲,۵)\cap(۱,۲+a^۲)=\varnothing$ باشد، آنگاه a متعلق به کدام بازه است؟

❶ $(-\infty,۱]$ ❷ $[۱,\infty)$ ❸ $[-۱,۱]$ ❹ $[۰,۱]$

گزینه ۳

در بازه‌ی سمت چپ، عددهای بزرگ‌تری وجود دارند و بنابراین باید وضعیتی شبیه زیر برقرار باشد تا اشتراک تهی گردد:



پس باید داشته باشیم:

$$۲+a^۲\le ۴-a^۲ \;\rightarrow\; ۲a^۲\le ۲ \;\rightarrow\; a^۲\le ۱ \;\Rightarrow\; -۱\le a\le ۱$$

متناهی یا نامتناهی:

یک مجموعه متناهی یا باپایان است، هرگاه:

تعداد عضوهای آن برابر عددی از مجموعه‌ی اعداد مسابی باشد.

نمونه‌ها:

- مجموعه‌ی $\{۱۰۱,۱۰۲,۱۰۳,\dots,۹۹۹\}$ متناهی، ولی مجموعه‌ی $\{\dots,-۲,-۱,۰,۱,۲\}$ نامتناهی است.
- چون بین هر دو عدد، بی‌شمار عدد حقیقی وجود دارد؛ تمام بازه‌ها نامتناهی هستند.

چه تعداد از موارد زیر مجموعه‌ای متناهی است؟

الف) مجموعه‌ی دوچرخه‌های موجود در کره‌ی زمین.

ب) مجموعه خطوطی که محور طول را در $x=-۳$ قطع می‌کنند.

ج) مجموعه‌ی اعداد حقیقی در بازه‌ی $[-۱,۲)$.

د) مجموعه‌ی $A=\{x\in\mathbb{N}\mid ۳^{-x}>\frac{۱}{۳}\}$

ه) $\mathbb{Z}-\mathbb{N}$

❶ ۲ ❷ ۳ ❸ ۴ ❹ ۵

گزینه ۱

واضح است که موارد (ب)، (ج) و (ه) بی پایان و (الف) متناهی است. بررسی مورد (د):

$$۳^{-x}>\frac{۱}{۳}=۳^{-۱} \;\rightarrow\; -x>-۱ \;\Rightarrow\; x<۱$$

پس $A=\varnothing$ بوده و متناهی است.

کدام دو مجموعه‌ی زیر، هر دو نامتناهی با اشتراک متناهی هستند؟

❶ مجموعه‌ی عددهای گویا و مجموعه‌ی عددهای اول

❷ مجموعه‌ی انسان‌های کره زمین و مجموعه افراد ایرانی

❸ مجموعه‌ی عددهای اول و مجموعه‌ی مضرب‌های عدد ۵

❹ بازه‌ی بسته‌ی ۰/۷ تا ۱ و بازه‌ی اعداد $x<۰/۸۵$

گزینه ۳

در مورد سوم، هر دو مجموعه نامتناهی هستند و اشتراک آن‌ها $\{۵\}$ متناهی است. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه‌ی ۱: هر دو مجموعه نامتناهی هستند و اشتراک آن‌ها تمام عددهای اول است که نامتناهی است.

گزینه‌ی ۲: هر دو مجموعه متناهی هستند.

گزینه‌ی ۴: هر دو بازه: $[۰/۷,۱]$ و $(-\infty,۰/۸۵)$ نامتناهی هستند و اشتراک آن‌ها: $[۰/۷,۰/۸۵)$ نیز نامتناهی است.

نکته ۳

به چند نتیجه‌گیری توجه کنید:

- اگر A نامتناهی باشد، هر مجموعه شامل A هم نامتناهی است.
- اگر A متناهی باشد، هر زیرمجموعه‌ی A هم متناهی خواهد بود.

برای نمونه:

چون $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,\ ...\}$ نامتناهی است، در نتیجه:

تمام مجموعه‌های W، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ نامتناهی هستند. بعلاوه: بدانید $\mathbb{Q}'$ نیز نامتناهی است.

کدام مورد همواره درست است؟

❶ اگر $A-B$ متناهی باشد، آنگاه A و B متناهی‌اند.

❷ اگر $A-B$ نامتناهی باشد، آنگاه A و B نامتناهی‌اند.

❸ اگر A نامتناهی و B متناهی باشد، آنگاه $A-B$ نامتناهی است.

❹ اگر A متناهی و B نامتناهی باشد، آنگاه $A-B$ نامتناهی است.

گزینه ۳

تنها در جمله‌ی سوم قطعیت وجود دارد:

چون B تعداد عضوهای محدودی دارد،

اگر تمام آن‌ها هم از A کم شوند، بازهم بی‌شمار عضو در $A-B$ باقی خواهد ماند.

0916 992 5753
farhad.shabani66

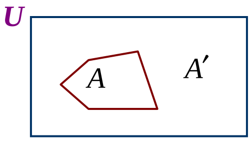
۲ مرجـع و متمم

دو مفهوم پرکاربرد در مبحث مجموعه‌ها:

مرجع و متمم:

مجموعه‌ی «**مرجع**» یا «**جهانی**» با نماد U مجموعه‌ای است که:

اعضای همه‌ی مجموعه‌های مورد بحث ما در آن قرار دارند.



به عبارت دیگر، تمام مجموعه‌ها، زیرمجموعه‌ی U محسوب می‌شوند.

بعلاوه:

مجموعه‌ی تمام اعضای خارج A را با A' نشان داده و به آن «**متمِم**» A گوئیم:

$$A' = U - A$$

برخی خواص ساده در مورد مجموعه‌ی متمم:

نکته ۴

در مورد هر مجموعه‌ی A، موارد زیر همیشه درست هستند:

$$A \cup A' = U \quad \text{و} \quad A \cap A' = \varnothing \quad \text{و} \quad (A')' = A$$

بعلاوه:

- همیشه $\varnothing' = U$ است، زیرا:

$$\varnothing' = U - \varnothing = U$$

- همیشه $U' = \varnothing$ است، زیرا:

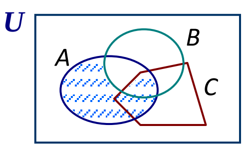
$$U' = U - U = \varnothing$$

U مجموعه‌ی مرجع و $A-(B-C) = (A-B)-C$ است. ساده شده‌ی $B \cap (A \cap C)'$ کدام است؟

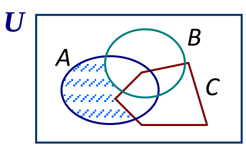
❶ $\varnothing$　　❷ B　　❸ $A-C$　　❹ U

گزینه ۲

تساوی داده شده را در شکل ببینید:



$A-(B-C)$



$(A-B)-C$

طبق شکل‌ها باید $A \cap C = \varnothing$ باشد. در نتیجه:

$$B \cap (A \cap C)' = B \cap \varnothing' = B \cap U = B$$

تعداد عضوها:

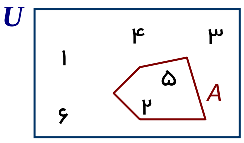
نمادهای $n(A)$ و $|A|$ هر دو تعداد عضوهای A را نشان می‌دهند. چند رابطه‌ی مهم در مورد تعداد اعضای مجموعه‌ها ببینید:

- **رابطه‌ی ۱:**

چون A و A' خلاف (متمم) یکدیگر هستند، همواره:

$$n(A') = n(U) - n(A)$$

برای نمونه؛ در شکل مقابل می‌بینید:

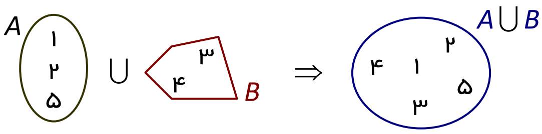


$$n(A') = n(U) - n(A) = ۶ - ۲ = ۴$$

- **رابطه‌ی ۲:**

اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم (یعنی: $A \cap B = \varnothing$) باشند، همواره:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = ۳ + ۲ = ۵$$

یادآوری:

منظور از تفاضل $A - B$، مجموعه اعضایی از A است که در B قرار ندارند. پس در واقع:

$$A - B = A - (A \cap B)$$

نکته ۵

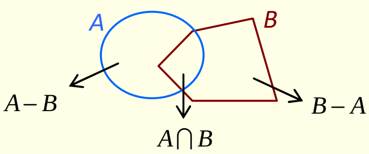
دو رابطه‌ی شمارشی مهم:

- اگر A و B دو مجموعه‌ی دلخواه باشند:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

- در مورد تفاضل هم، رابطه‌ی مهم زیر برقرار است:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$



مثال: کلاسی ۳۲ دانش‌آموز دارد. اگر ۱۳ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۴ نفر عضو تیم والیبال این کلاس باشند و ۱۰ نفر هم عضو هیچ تیمی نباشند:

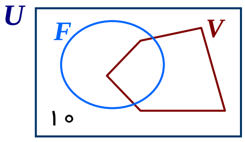
الف) چند نفر هم در تیم فوتبال و هم در تیم والیبال عضو هستند؟

ب) چند نفر فقط عضو تیم فوتبال هستند؟

پ) چند نفر فقط عضو تیم والیبال هستند؟

پاسخ

مجموعه‌های F و V را به ترتیب مجموعه‌ی افراد فعال در فوتبال و والیبال در نظر بگیرید. چون کلاس ۳۲ نفر است و ۱۰ نفر هیچ ورزشی انجام نمی‌دهند، تعداد کل افراد فعال در فوتبال و یا والیبال $۳۲-۱۰=۲۲$ نفر خواهد بود.



$n(U)=۳۲$

پس داریم:

$$n(F)=۱۳ \quad و \quad n(V)=۱۴ \quad و \quad n(F\cup V)=۲۲$$

الف) تعداد افراد فعال در هر دو ورزش، یعنی $n(F\cap V)$:

$$n(F\cup V)=n(F)+n(V)-n(F\cap V) \to ۲۲=۱۳+۱۴-n(A\cap B)$$
$$\Rightarrow n(F\cap V)=۲۷-۲۲=۵$$

ب) تعداد افرادی که فقط فوتبال بازی می‌کنند، همان $n(F-V)$ است که طبق نکته‌ی قبل حاصل می‌شود:

$$n(F-V)=n(F)-n(F\cap V)=۱۳-۵=۸$$

پ) به صورت کاملاً مشابه، تعداد افرادی که فقط والیبال بازی می‌کنند، به‌دست خواهد آمد:

$$n(V-F)=n(V)-n(F\cap V)=۱۴-۵=۹$$

اگر $n(A\cap B)=۴$ و $n(A\cup B)=۲۰$ باشد، حاصل $n(A-B)+n(B-A)$ کدام است؟

❶ ۱۰ ❷ ۱۶ ❸ ۲۴ ❹ ۱۲

گزینه ۲

رابطه‌ی مربوط به تفاضل را دو بار می‌نویسیم:

$$n(A-B)+n(B-A)=\underbrace{n(A)-n(A\cap B)+n(B)}_{=n(A\cup B)}-n(A\cap B)=۲۰-۴=۱۶$$

اگر $n(A)=۴$ و تعداد اعضای B برابر ۲ باشد، مقدار $n(A-B)$ کدام نمی‌تواند باشد؟

❶ ۱ ❷ ۲ ❸ ۳ ❹ ۴

گزینه ۱

چون $A\cap B$ زیر مجموعه‌ی B است، بنابراین $n(A\cap B)$ می‌تواند ۰، ۱ یا ۲ باشد. در نتیجه:

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۴-n(A\cap B)=۴ \text{ یا } ۳ \text{ یا } ۲$$

اگر $n(A)=۴$ و $n(A\cup B)=۱۳$ باشد، محدوده‌ی $n(B)$ کدام است؟

❶ $۰\le n(B)\le ۹$
❷ $۰\le n(B)\le ۱۳$
❸ $۴\le n(B)\le ۹$
❹ $۹\le n(B)\le ۱۳$

گزینه ۴

$$۱۳=۴+n(B)-n(A\cap B)\ \rightarrow\ n(B)-n(A\cap B)=۹$$

اگر $n(A\cap B)=۰$ باشد، کمترین مقدار $n(B)=۹$ و با توجه به $n(A\cap B)\le n(A)=۴$، اگر $n(A\cap B)=۴$ باشد، بیشترین مقدار $n(B)$ حاصل خواهد شد:

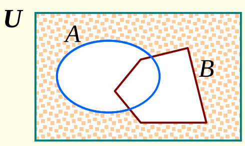
$$n(B)=n(A\cap B)+۹=۴+۹=۱۳$$

یک رابطه‌ی شمارشی بسیار مهم:

نکته ۶

برای دو مجموعه‌ی A و B،

عضوهایی که در هیچ‌یک از آن دو قرار ندارند، دقیقاً خارج $A\cup B$ است.



بنابراین تعداد چنین عضوهایی برابر است با:

$$n(U)-n(A\cup B)=n(U)-[n(A)+n(B)-n(A\cap B)]$$

بیان دیگر:

(تعداد عضوهایی که نه در A هستند و نه در B)

برای نمونه؛

در یک کلاس با ۳۳ دانش‌آموز، ۲۱ نفر در درس ریاضی و ۲۶ نفر در شیمی قبول شده و ۱۸ نفر در هر دو درس قبول شده‌اند. محاسبه‌ی تعداد مردودی در هر دو درس:

باید تعداد افرادی را حساب کنیم که در هیچ‌کدام از دو مجموعه قرار ندارند. (A و B افراد قبول در ریاضی و شیمی)

$$n(U)-[n(A)+n(B)-n(A\cap B)]=۳۳-(۲۱+۲۶-۱۸)=۳۳-۲۹=۴$$

برای مجموعه‌های $A=\mathbb{Q}'\cup\mathbb{N}$ و $B=\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$، کدام عدد در مجموعه‌ی $A\cup B$ قرار ندارد؟

❶ $۰/۱$
❷ $\sqrt{\frac{۱}{۹}}$
❸ $\frac{-۲}{\sqrt[۳]{۳}}$
❹ -۱

گزینه ۴

باید اعضای دو مجموعه را بشناسیم:

A: **تمام اعداد گنگ و طبیعی** B: **تمام اعداد گویا به جز عددهای صحیح**

0916 992 5753
farhad.shabani66

چنان‌که گفته‌ایم، عدد مورد نظر باید در هیچ‌یک از A و B نباشد؛ فقط عدد -1 چنین است. (عددهای گویای $0/1$ و $\frac{1}{3}=\sqrt{\frac{1}{9}}$ در B و عدد گنگ $\frac{-2}{\sqrt[3]{3}}$ در A قرار دارد.)

در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزش هستند. چند نفر آنان عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند؟ (ریاضی ۹۸)

❶ ۱۵ ❷ ۱۶ ❸ ۱۷ ❹ ۱۸

گزینه ۴

قرار دهید: $n(V)=16$ و $n(R)=12$. چون $n(V-R)=9$ است:

$$n(V)-n(V\cap R)=9 \quad\Rightarrow\quad n(V\cap R)=16-9=7$$

مشابه قبل خواهیم داشت:

$$n(U)-[n(V)+n(R)-n(V\cap R)]=39-(16+12-7)=39-21=18$$

توصیه مهم:

سعی کنید این سؤال و موارد مشابه را با رسم شکل و بدون فرمول جواب دهید.

در یک کلاس، نصف دانش‌آموزان به ورزش فوتبال، $\frac{3}{8}$ دانش آموزان به ورزش والیبال و $\frac{1}{8}$ دانش‌آموزان به هر دو ورزش علاقمند هستند. اگر ۱۰ نفر به هیچ یک از دو ورزش علاقمند نباشند، تعداد دانش‌آموزانی که به هر دو ورزش علاقمند هستند، کدام است؟

❶ ۱۵ ❷ ۲۰ ❸ ۱۵ ❹ ۵

گزینه ۴

اگر کلاس را یک واحد در نظر بگیرید، نسبت تعداد دانش آموزانی که به هیچ ورزشی علاقه ندارند:

$$n(U)-[n(F)+n(V)-n(F\cap V)] \rightarrow 1-(\frac{1}{2}+\frac{3}{8}-\frac{1}{8})=1-\frac{4+3-1}{8}=\frac{1}{4}$$

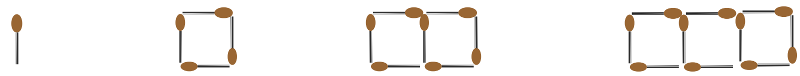
یعنی: $\frac{1}{4}$ کلاس ۱۰ نفر بوده و در نتیجه کلاس ۴۰ نفر است. $\frac{1}{8}$ این کلاس برابر است با:

$$\frac{1}{8}\times 40=5$$

---

۳ الگو و دنبـــاله

گاهی لازم است در شکل‌های متوالی و منظم، الگوهایی عددی بیابیم. نمونه:



(۱) (۲) (۳) (۴)

تعداد چوب کبریت‌ها در شکل‌های دهم و nاُم را مشخص می‌کنیم. چون در هر مرحله ۳ چوب کبریت اضافه می‌شود:

$$\underbrace{۱}_{(۱)},\underbrace{۱+۱\times ۳}_{(۲)},\underbrace{۱+۲\times ۳}_{(۳)},\underbrace{۱+۳\times ۳}_{(۴)},\underbrace{۱+۴\times ۳}_{(۵)},\dots$$

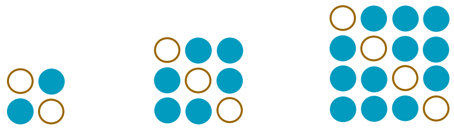
می‌بینید:

فقط ضریبِ عدد ۳ در حال تغییر است و این ضریب از شماره‌ی جمله، یک واحد کوچک‌تر است.

بنابراین شکل دهم به صورت $۱+۹\times ۳=۲۸$ و تعداد آن‌ها در شکل nاُم برابر است با:

$$t_n=۱+(n-۱)\times ۳=۱+۳n-۳=۳n-۲$$

تعداد گوی‌های رنگی در شکل nاُم الگوی زیر کدام است؟



(۱) (۲) (۳) .....

❶ $n^۲$
❷ $۲n^۲-۱$
❸ $n^۲-n$
❹ $n^۲+n$

گزینه ۴

تعداد گوی‌های رنگی در شکل اول: $۲^۲-۲$، در شکل دوم: $۳^۲-۳$ و ... و در نتیجه در شکل nاُم برابر است با:

$$(n+۱)^۲-(n+۱)=n^۲+۲n+۱-n-۱=n^۲+n$$

الگوی خطی و غیرخطی:

«الگوی خطی» به صورت $t_n=an+b$ یک عبارت درجه اول بر حسب n است. مانند:

$$۱,۴,۷,۱۰,\dots,۳n-۲,\dots \Rightarrow t_n=۳n-۲$$

سایر الگوها غیرخطی هستند، نظیر:

$$۲,۵,۱۰,۱۷,\dots,n^۲+۱,\dots \Rightarrow t_n=n^۲+۱$$

اگر در یک الگوی خطی، جمله‌ی اول ۳ و جمله‌ی پنجم آن ۵− باشد، جمله‌ی شماره‌ی ..... در آن برابر ۳۹− است.

❶ ۱۱ ❷ ۲۱ ❸ ۲۲ ❹ ۱۲

گزینه ۳

الگو را به صورت $t_n = an+b$ بگیرید:

$$t_۱ = ۳: \quad a(۱)+b=۳ \rightarrow a+b=۳$$
$$t_۵ = -۵: \quad a(۵)+b=-۵ \rightarrow ۵a+b=-۵$$

با حل دستگاه خواهیم داشت: $a=-۲$ و $b=۵$. پس الگو به صورت $t_n=-۲n+۵$ است و باید معادله‌ی $t_n=-۳۹$ حل شود:

$$-۲n+۵=-۳۹ \rightarrow -۲n=-۴۴ \Rightarrow n=۲۲$$

در یک الگوی خطی، جمله‌ی چهاردهم، چهار برابر جمله‌ی سوم است. در این الگو، نسبت جمله‌ی بیست و دوم به جمله‌ی پنجم کدام است؟

❶ ۴ ❷ ۵ ❸ ۶ ❹ ۷

گزینه ۱

در الگوی $t_n=an+b$ باید $t_{۱۴}=۴t_۳$ باشد:

$$۱۴a+b=۴(۳a+b) \Rightarrow ۲a=۳b$$

اکنون نسبت مورد نظر حساب می‌شود:

$$\frac{t_{۲۲}}{t_۵}=\frac{۲۲a+b}{۵a+b}\ {}^{\times ۲}_{\times ۲}=\frac{۲۲(۲a)+۲b}{۵(۲a)+۲b}=\frac{۲۲(۳b)+۲b}{۵(۳b)+۲b}=\frac{۶۸b}{۱۷b}=۴$$

در دنباله‌ی خطی t_n داریم: $t_{n+۲}-nt_{n-۳}=۲n^۲-۹n-۳$. جمله‌ی دهم کدام است؟

❶ ۱۹ ❷ -۱۹ ❸ -۲۳ ❹ ۲۳

گزینه ۲

قرار دهید: $t_n=an+b$. طبق تساوی داده شده:

$$a(n+۲)+b-n(a(n-۳)+b)=-an^۲+(a+۳a-b)n+۲a+b=۲n^۲+۳n-۳$$

با مقایسه‌ی ضرایب، باید:

$$-a=۲ \Rightarrow a=-۲ \quad و \quad ۲a+b=-۳ \Rightarrow b=۱$$

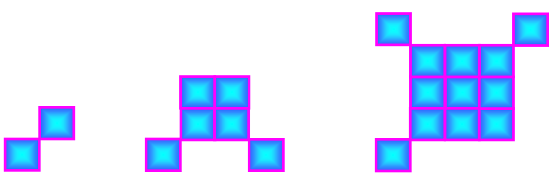
در نتیجه:

$$t_n=-۲n+۱ \Rightarrow t_{۱۰}=-۲۰+۱=-۱۹$$

نمونه‌های دیگری از الگوهای غیرخطی:

تعداد مربع‌های واحد در الگوی زیر تشکیل یک دنباله می‌دهند. جمله‌ی سیزدهم دنباله کدام است؟

❶ ۱۴۴
❷ ۱۶۹
❸ ۱۹۲
❹ ۱۸۲



گزینه ۴

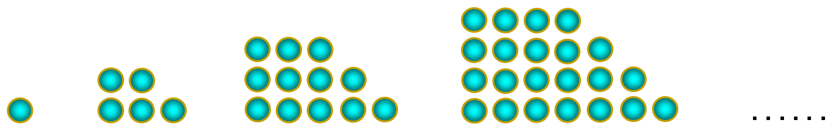
تعداد مربع‌ها در سه شکل داده شده:

شکل اول: $۱+۱$ مربع   و   **شکل دوم:** $۲^۲+۲$ مربع   و   **شکل سوم:** $۳^۲+۳$ مربع

بنابراین:

$$t_n = n^۲ + n \Rightarrow t_{۱۳} = ۱۳^۲ + ۱۳ = ۱۸۲$$

در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها در شکل نهم، کدام است؟ **(تجربی ۹۸)**



❶ ۱۱۷   ❷ ۱۲۰   ❸ ۱۲۳   ❹ ۱۲۵

گزینه ۱

تعداد گوی‌ها:

در شکل دوم $۱+۲^۲$، در شکل سوم $۳+۳^۲$، در شکل چهارم $۶+۴^۲$ و ...

با قدری دقت، الگو به صورت $t_n = n^۲ + \frac{n\times(n-۱)}{۲}$ نوشته شده و بنابراین:

$$t_۹ = ۹^۲ + \frac{۹\times(۹-۱)}{۲} = ۸۱ + ۳۶ = ۱۱۷$$

دنباله:

در یک دنباله‌ی a_n، اولین جمله $a_۱$، دومین جمله $a_۲$ و ... بوده و نمایش آن چنین است:

$$a_۱, a_۲, a_۳, \dots, a_n, \dots$$

a_n **«جمله‌ی عمومی»** یا **«جمله‌ی n اُم»** است.

در دنباله‌ی $a_n = \frac{۲۲-۳n}{۳+n}$ چند جمله‌ی مثبت وجود دارد؟

❶ ۶   ❷ ۹   ❸ ۸   ❹ ۷

گزینه ۴

باید نامساوی زیر برقرار شود:

$$\frac{۲۲-۳n}{۳+n} > ۰$$

چون مخرج همواره مثبت است، کافی است صورت کسر هم مثبت باشد:

$$۲۲-۳n > ۰ \rightarrow -۳n > ۲۲ \rightarrow n < \frac{۲۲}{۳} \cong ۷/۳$$

0916 992 5753   farhad.shabani66

پس: جواب عددهای ۱، ۲، ...، ۷ است.

اگر در یک دنباله $a_{۲n-۵}=\frac{n+۳}{۲n+۳}$ باشد، جمله‌ی هفتم آن کدام است؟

❶ $\frac{۵}{۹}$ ❷ $\frac{۱۴}{۲۵}$ ❸ $\frac{۳}{۵}$ ❹ $\frac{۸}{۱۳}$

گزینه ۳

چون $a_۷$ خواسته شده، قرار می‌دهیم:

$$۲n-۵=۷ \Rightarrow n=۶$$

پس برای $n=۶$ خواهیم داشت:

$$a_{۲(۶)-۵}=\frac{۶+۳}{۲(۶)+۳} \Rightarrow a_۷=\frac{۹}{۱۵}=\frac{۳}{۵}$$

نوع دیگری از دنباله‌ها «بازگشتی» هستند؛ نمونه‌هایی ببینید.

مثال: پنج جمله‌ی اول از دنباله‌ی زیر را تعیین کنید:

$$t_۱=-۱,\ t_n=-۲t_{n-۱}+۱ \quad (n\geq ۲)$$

پاسخ

قرار می‌دهیم $n=۲$ و از فرض $t_۱=-۱$ استفاده می‌کنیم:

$$t_۲=-۲t_۱+۱=-۲(-۱)+۱=۳$$

به صورت مشابه:

$$n=۳:\ t_۳=-۲t_۲+۱=-۲(۳)+۱=-۵$$
$$n=۴:\ t_۴=-۲t_۳+۱=-۲(-۵)+۱=۱۱$$
$$n=۵:\ t_۵=-۲t_۴+۱=-۲(۱۱)+۱=-۲۱$$

توجه کنید:

در این نوع دنباله‌ها برای تعیین هر جمله، به اطلاعاتی از جملات قبلی نیاز است.

فرض کنید جمله‌ی صدم دنباله‌ی بازگشتی $a_{n+۱}=\frac{۱}{a_n}+۱$ با شرط $a_۱=۱$ برابر $\frac{k}{m}$ باشد. جمله‌ی نود و هشتم دنباله کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

❶ $\frac{k-m}{۲m-k}$ ❷ $\frac{k-۲m}{k-m}$ ❸ $\frac{k-m}{k-۲m}$ ❹ $\frac{۲m-k}{k-m}$

گزینه ۱

جمله‌ی نود و هشتم باید از رابطه‌ی $a_{۹۹}=\frac{۱}{a_{۹۸}}+۱$ تعیین شود:

$$\frac{1}{a_{98}}=a_{99}-1 \Rightarrow a_{98}=\frac{1}{a_{99}-1}$$

پس جمله‌ی نود و نهم مورد نیاز است:

$$a_{100}=\frac{1}{a_{99}}+1 \rightarrow \frac{1}{a_{99}}=\frac{k}{m}-1=\frac{k-m}{m} \Rightarrow a_{99}=\frac{m}{k-m}$$

بنابراین:

$$a_{98}=\frac{1}{a_{99}-1}=\frac{1}{\frac{m}{k-m}-1}=\frac{1}{\frac{m-k+m}{k-m}}=\frac{k-m}{2m-k}$$

وضعیت زیاد یا کم شدن جملات دنباله:

نکته ۷

یکنوایی دنباله‌ها:

دنباله‌ی $a_1, a_2, a_3, \dots$ را در نظر بگیرید. در این صورت:

- دنباله را **«صعودی»** گویند، هرگاه: $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots$

یعنی جملات در حال زیاد شدن هستند.

- دنباله را **«نزولی»** گویند، هرگاه: $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots$

که در آن جملات در حال کاهش هستند.

دنباله‌ای که صعودی یا نزولی باشد، **«یکنوا»** نامیده می‌شود.

توجه کنید:

در حالت خاص، دنباله‌ی ثابت هم صعودی و هم نزولی است. مانند:

$4, 4, 4, \dots$

۴ دنباله‌ی حسابی

در این بخش و بخش بعدی دو نوع خاص از دنباله را بررسی می‌کنیم که «تَصاعُد» نیز نامیده می‌شوند.

دنباله حسابی:

در «دنباله‌ی حسابی» یا نام دیگر آن: «دنباله‌ی عددی»، اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی یک مقدار ثابت است. به آن عددِ ثابت **«قدرنسبت»** گفته و آن را با d نشان می‌دهیم. مانند:

$$-۲\,,۱\,,۴\,,۷\,,۱۰\,,\ \dots \qquad (a_1=-۲,\ d=۳)$$

نکته ۸

اگر جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی را با a و قدرنسبت را با d نشان دهیم، شکل کلی چنین است:

$$\underbrace{a}_{a_1}\,,\ \underbrace{a+d}_{a_2}\,,\ \underbrace{a+۲d}_{a_3}\,,\ \underbrace{a+۳d}_{a_4}\,,\ \dots$$

جمله‌ی دهم به صورت $a+۹d$ خواهد بود و در کل:

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی به صورت $a_n=a+(n-۱)d$ است.

برای نمونه؛

در دنباله‌ی حسابی $\dots\,,۱۰\,,۷\,,۴$ داریم: $a_1=۴$ و $d=۳$. در نتیجه جمله‌ی عمومی به صورت زیر است.

$$a_n=۴+(n-۱)(۳)=۳n+۱$$

توجه کنید:

- دنباله‌ی حسابی همان دنباله‌ی خطی (درجه اول) است. بعلاوه، در این نوع دنباله، ضریب n برابر قدرنسبت است.

  نمونه:

  در دنباله‌ی حسابی $a_n=-۳n+۲$ داریم: $d=-۳$.

- در این دنباله، قدر نسبت برابر است با **«تفاضل»** هر دو جمله‌ی متوالی:

$$d=a_2-a_1=a_3-a_2=\dots=a_n-a_{n-1}=\dots$$

در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع سه جمله‌ی اول ۹ و مجموع سه جمله‌ی بعدی آن برابر ۴۵ است. جمله‌ی چندم دنباله ۳۹۹ است؟

❶ ۹۹　❷ ۱۰۰　❸ ۱۰۱　❹ ۱۰۲

گزینه ۳

باید: $a_1+a_2+a_3=۹$ و $a_4+a_5+a_6=۴۵$ باشد. یعنی:

0916 992 5753　farhad.shabani66