به نام خدا

معادلات کاربردی در فیزیک

مولف :

دکتر هدی قوامی نیا

عضو هیات علمی دانشگاه آزاد واحد دزفول

انتشارات ارسطو

(سازمان چاپ و نشر ایران - ۱۴۰۳)

نسخه الکترونیکی این اثر در سایت سازمان چاپ و نشر ایران و اپلیکیشن کتاب رسان موجود می باشد

chaponashr.ir

سرشناسه : قوامی‌نیا، هدی، ۱۳۶۱-
عنوان و نام پدیدآور : معادلات کاربردی در فیزیک/ هدی قوامی‌نیا.
مشخصات نشر : انتشارات ارسطو (سازمان چاپ و نشر ایران)،۱۴۰۳.
مشخصات ظاهری : ۴۰۱ص.
شابک : ۵-۴۴۱-۴۰۸-۶۲۲-۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی : فیپا
موضوع : فیزیک ریاضی-- راهنمای آموزشی(عالی).
Mathematical physics-- Study and teaching(Higher).
فیزیک ریاضی -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)
Mathematical physics -- Problems, exercises, etc. (Higher)
معادله‌ها -- راهنمای آموزشی (عالی)
Equations -- Study and teaching (Higher)
معادله‌ها -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)
Equations -- Problems, exercises, etc. (Higher)
رده بندی کنگره : QC۲۰/۸۲
رده بندی دیویی : ۵۳۰/۱۵۰۷۶
شماره کتابشناسی ملی : ۹۸۲۶۴۵۲
اطلاعات رکورد کتابشناسی : فیپا

نام کتاب : معادلات کاربردی در فیزیک
مولف : دکتر هدی قوامی نیا
ناشر : انتشارات ارسطو (سازمان چاپ و نشر ایران)
صفحه آرایی، تنظیم و طرح جلد: پروانه مهاجر
تیراژ : ۱۰۰۰ جلد
نوبت چاپ : اول – ۱۴۰۳
چاپ : زبرجد
قیمت : ۴۰۰۰۰۰ تومان
فروش نسخه الکترونیکی - کتاب‌رسان :
https://chaponashr.ir/ketabresan
شابک : ۵-۴۴۱-۴۰۸-۶۲۲-۹۷۸
تلفن مرکز پخش : ۰۹۱۲۰۲۳۹۲۵۵
www. chaponashr. ir

انتشارات ارسطو

مقدمه

در قرن‌های گذشته، به نظر می‌رسید که دنیای فیزیکی پر از اسرار است. قدرت های الهی می توانند معجزات واقعی را فراهم کنند. آب و نور خورشید می توانند زمین های خشک را به مراتع حاصلخیز تبدیل کنند، اما همین قدرت ها می توانند منجر به بدبختی ها و بلایایی شود. نیروی حیات، مسئول همه موجودات زنده است. آسمانها و هر آنچه در آن بود، شامل ستارگان و اجرام آسمانی در انحصار خدایان بودند. البته ریاضیات وجود داشت و ساختار هندسی فضا که، یک جنبه از دنیای فیزیکی بود توسط منطق ریاضی دقیق کنترل می شد. زمانی که یونانی ها متوجه شدند که همه ویژگی‌های هندسی فضا را می‌توان به تعداد کمی بدیهیات تقلیل داد. «قوانین بنیادی فیزیک» را ساختند.

اما به نظر می رسید دنیای واقعی اطراف ما چیزهای بیشتری را در بر می گرفت که بسیار فراتر از ظرفیت تحلیل ما بود. به تدریج، همه چیز تغییر کرد. به نظر می رسد که ماه و سیارات از قوانین هندسی پیروی می کنند. گالیله و نیوتن موفق شدند قوانین منطقی حرکت خود را شناسایی کنند و با اشاره به اینکه مفهوم جرم را می توان در مورد چیزهای موجود در آسمان درست مانند سیب و گلوله های توپ روی زمین به کار برد، آسمان را کمی برای ما قابل دسترس تر کردند. همچنین مشخص شد که الکتریسیته، مغناطیس، نور و صدا کاملاً مطابق با معادلات ریاضی رفتار می کنند.

با این حال همه اینها فقط یک شروع بود. تغییرات واقعی در قرن بیستم اتفاق افتاد. آلبرت اینشتین یک روش کاملاً جدید از تفکر را با تأکید بر تحلیل ریاضی و منطقی به جای شواهد تجربی آغاز کرد. به کار بردن مفاهیم پیشرفته ریاضی که فقط برای تعداد کمی از ریاضیدانان محض می‌شناختند، در مفاهیم پیش پا افتاده مانند فضا و زمان، برای فیزیکدانان زمان او تازگی داشت. خود اینشتین برای مبارزه با منطق اتصالات و انحناها، مفاهیمی که برای او کاملاً جدید

بود، اما امروزه برای دانشجویان فیزیک ریاضی بیش از حد آشنا هستند، به سختی دست و پنجه نرم کرد. در واقع، هیچ گواهی بهتر از بینش عمیق انیشتین در آن زمان وجود ندارد، از این واقعیت که ما اکنون این چیزها را به طور منظم در کلاس های درس دانشگاه خود آموزش می دهیم. نسبیت خاص و عام تنها گوشه های کوچکی از قلمرو فیزیک مدرن هستند که در حال حاضر با استفاده از آن مورد مطالعه قرار می گیرند. روش های ریاضی پیشرفته ما موضوعات بسیار پیچیده‌ای مانند انتقال فاز در فیزیک ماده چگال، ابررسانایی، تراکم بوز–انیشتین، اثر هال کوانتومی، به‌ویژه اثر هال کوانتومی کسری، و موضوعات متعددی از فیزیک ذرات بنیادی، از دسته‌های فیبر و گروه‌های نرمال‌سازی مجدد تا فوق‌العاده داریم. ، توپولوژی جبری، نظریه ابر ریسمان وغیره، همه اینها به حداکثر مهارت های ذهنی ما نیاز دارند تا آنها را درک کنیم.

گیج‌کننده‌ترین مشاهداتی که امروز انجام می‌دهیم این است که به نظر می‌رسد کل دنیای فیزیکی ما با معادلات ریاضی کنترل می‌شود، و اینها فقط مدل‌های آشفته و قابل بحث نیستند، بلکه ویژگی‌های دقیق مواد سیستم‌ها و پدیده‌ها در تمام لایه‌های جهان ما هستند. آیا این واقعاً برای کل جهان ما صدق می کند یا فقط برای بخش هایی از آن؟ آیا ویژگی ها، مفاهیم، موجودیت هایی وجود دارند که به طور تاکیدی ریاضی نیستند؟ در مورد شهود، یا رویاها، و در مورد آگاهی چطور؟ دین چطور؟ در اینجا، بسیاری از ما می گویند، حتی نباید سعی کرد تحلیل ریاضی را به کار برد، اگرچه حتی در اینجا، برخی از دانشمندان علوم اجتماعی شجاع تلاش می کنند تا رویکردهای منطقی را هماهنگ کنند.

تفاوت های واضح و مهمی بین دنیای فیزیکی و دنیای ریاضی وجود دارد. جایی که جهان فیزیکی برجسته می شود این حقیقت است که به «واقعیت» هر چه «واقعیت» باشد اشاره می کند. ریاضیات دنیای منطق محض و استدلال محض است. در فیزیک این شواهد تجربی است که در نهایت تصمیم می گیرد که آیا یک نظریه قابل قبول است یا خیر. همچنین روش شناسی در فیزیک متفاوت است .

علم ترکیبی فیزیک ریاضی یک علم بسیار کنجکاو است. برخی از موضوعات این دایره المعارف بدون شک فیزیکی هستند ، ابررسانایی Tc بالا، امواج آب شکسته، و مغناطیسی هیدرودینامیک، قطعاً موضوعاتی از فیزیک هستند که در آن داده‌های تجربی تعیین‌کننده‌تر از هر تئوری پیشروی بالا هستند. با این حال، نظریه هم شناسی، نظریه دونالسون ویتند و مکاتبات AdS/CFT، نمونه‌هایی از تمرین‌های کاملاً ریاضی هستند، حتی اگر این موضوعات، مانند همه موضوعات

دیگر در این مجموعه، به شدت از سؤالات مطرح شده در فیزیک الهام گرفته شده و مرتبط با آن باشند. در تلفیقی از تعداد زیادی مقاله کوتاه با نویسندگان مختلف بسیار اجتناب‌ناپذیر است که تنوع کمی در سبک و سطح مشاهده شود. در این دایره المعارف، فیزیکدانان نظری و همچنین ریاضیدانان با هم تلاش زیادی کردند تا دیدگاه خود را در مورد مسائل مهم متعدد در فیزیک ریاضی پیشرفته به شیوه ای مختصر و قابل درک ارائه کنند.

ما امیدواریم و انتظار داریم که این تلاش ها در خدمت هدف خوبی باشد.

فهرست مطالب

فصل سوم- معادلات دیفرانسیل خودالحاقی ۱۳۹

فصل چهارم- تبدیلات فوریه ۱۶۰

فصل پنجم- تبدیلات لاپلاس ۲۷۶

فصل اول

معادلات دیفرانسیل

بسیاری از رابطه‌های فیزیکی به فرم معادلات دیفرانسیل بیان می‌شوند. برای مثال رابطه بین شتاب × جرم = نیرو در یک بعد می‌تواند به صورت

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{۱-۱}$$

نوشته شود. انتگرال‌گیری از معادله بالا شامل دو مرحله است. با فرض ثابت گرفتن شتاب داریم

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F}{m}t + c \tag{۲-۱}$$

$$x = \frac{F}{2m}t^2 + ct + d \tag{۳-۱}$$

که در اینجا d, c دو ثابت انتگرال‌گیری هستند که می‌تواند با شرایط مرزی متناسب با سیستم مشخص شود. شتاب به تنهایی نمی‌تواند مشخص کند که یک جسم در زمان مشخصی در کجا قرار گرفته زمانی که اطلاعی در مورد مکان شروع حرکت یا سرعت اولیه جسم در زمان $t = 0$ نداریم. در معادله (۱-۲) می‌بینیم که c سرعت اولیه جسم است. به طور مشابه با $t = 0$در (۱-۳) درمی‌یابیم که d مکان اولیه جسم است. این مثال نشان می‌دهد که پارامترهای ضروری حل یک معادله دیفرانسیل معمولی یک پارامتر مستقل است که در این مورد زمان است. برای حل یک معادله دیفرانسیل معمولی از روش انتگرال گیری برای پیداکردن متغیر و از شرایطاولیه برای مشخص کردن ثابت انتگرال‌گیری استفاده می‌شوند. از آنجا که معادله (۱-۴) شامل مشتق هم است یک معادله دیفرانسیل درجه دوم است. یک معادله دیفرانسیل معمولی می‌تواند بیشتر از یک متغیر وابسته داشته باشد. جسم p با جرم ناچیز را که در صفحه xy تحت تأثیر جاذبه به جرم M که در مبدأ واقع است قرار گرفته درنظر بگیرید. (شکل ۱-۴) شتاب جسم مستقیماً به سمت مبدأ است و مقدار آن برابر است با

$$a_r = \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{x^2 + y^2} \tag{۴-۱}$$

که در اینجا G ثابت گرانش، r فاصله op و (x, y) مختصات p است.شتاب مؤلفه‌های (a_x, a_y)دارد که

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = a_r \cos\theta = \frac{-GMx}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

(۵-۱)

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = a_r \sin\theta = \frac{-GMy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

علامت منفی جهت شتاب را نشان می‌دهد به طوری که برای مثال زمانی که x مثبت است a_x منفی و دو متغیر وابسته در این مورد (x, y) هستند و معادله (۱-۵)معادله دیفرانسیل مرتبه دوم جفت شده است. جفت شده به معنی این است که برخی معادلات از سری شامل بیش از یک متغیر هستند. در بیان ریاضی محض معادلات دیفرانسیل معمولی به فرمهایی با متغیرهای نامحدود وجود دارند. ولی خوشبختانه در جهان فیزیک ما با نوعهای با پارامترهای کم سروکار داریم. در اینجا ما برخی روش‌های استاندارد را برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول و دوم نسبتاً ساده ارائه می‌دهیم. بعدها خواهیم دید که حتی معادلات دیفرانسیل های بسیار پیچیده می‌توانند با روش‌های عددی توانا برای مسائل واقعی فیزیکی با شرایط غیر قابل دسترس حل شوند. ابتدا تکنیک‌های مختلف برای حل معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی اول به فرم $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ را ارائه می‌دهیم.

۱-۱.معادله دیفرانسیل با متغیرهای جدا شدنی.

معادله دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (۶-۱)$$

را درنظر می‌گیریم. اگر بتوان تابع $f(x, y)$ را به صورت $\frac{g(x)}{h(x)}$ نوشت. نتیجه می‌شود.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{g(x)}{h(y)} \rightarrow h(y)d(y) = g(x)dx$$

(۷-۱)

معادله اخیر از نوع معادله دیفرانسیل با متغیرهای جدا شدنی است و می‌توان با انتگرال‌گیری جواب آن را پیدا کرد.

$$\int h(y)d(y)=\int g(h)dx+c \qquad (۸-۱)$$

مثال۱-۱-۱: معادله دیفرانسیل $y'+y=0$ را حل کنید:

$$\frac{dy}{dx}=-Y\rightarrow\frac{dy}{y}=-dx\rightarrow\lim y=-x+c\rightarrow y=e^{-x+c}\rightarrow y=ke^{-x}$$

معادله دیفرانسیل همگن

تابع $w=f(x,y)$ همگن است هرگاه عددی مانند n وجود داشته باشد به طوری که برای هر t داشته باشیم.

$$f(t_x,t_y)=t^n f(x,y)$$

در این صورت تابع f را همگن از درجه n می‌گوییم.

مثال۱-۱-۲: تابع $f(x,y)=x+y^2$ همگن نیست ولی توابع $g(x,y)=xy+y^2$ و $h(x,y)=\sin\frac{x}{y}$ همگن از درجه‌های دو و صفر می‌باشند.

معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dx=0$ را یک معادله دیفرانسیل همگن گویند هرگاه توابع $M(x,y)$ و $N(x,y)$ همگن باشند و دارای درجه‌های یکسان باشند.

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0\rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-M(x,y)}{N(x,y)}=f(x,y)$$

که معادله اخیر همگن از درجه صفر است. با درنظر گرفتن $z=\frac{y}{x}$ می‌توان معادله دیفرانسیل را به معادله دیفرانسیل با متغیرهای جداشدنی تبدیل کرد.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(tx,ty)}{N(tx,ty)}=-\frac{M\left(1,\frac{y}{x}\right)}{N\left(1,\frac{y}{x}\right)}=-\frac{M(1,z)}{N(1,z)}=g(z)\rightarrow\frac{dy}{dx}=g(z)$$

حال از طرفین رابطه $y = xz$ دیفرانسیل می‌گیریم.

$$dy = zdx + xdz$$

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx} \rightarrow x\frac{dz}{dx} = g(z) - z \rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dz}{g(z)-z} \rightarrow x = e^{\int\frac{dz}{g(z)-z}} + c$$

با حل انتگرال فوق و درنظر گرفتن $z = \frac{y}{x}$ جواب معادله مورد نظر بدست می‌آید.

مثال۱-۱-۳: جواب معادله دیفرانسیل $x^2y' - 3xy - 2y^2 = 0$ را بیابید.

$$-3xy - 2y^2 = 0 \Rightarrow -(3xy + 2y^2)dx + x^2dy = 0 \rightarrow y' = \frac{3xy + 2y^2}{x^2} = \frac{3x^2z + 2x^2z^2}{x^2}$$

$$z + 2z^2, \frac{y}{x} = z \rightarrow dy = xdz + zdx \rightarrow x\frac{dz}{dx} + z = 3z + 2z^2$$

$$= \frac{dz}{2(z+z^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{1+z}\right)dz \rightarrow \ln x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{z}{1+z}\right) + c = \ln k\frac{y}{y+x} \Rightarrow x = k\sqrt{\frac{y}{y+x}}$$

توجه کنیدکه معادله $(ax+by+c)dx + (a'x+b'y+c')dy = 0$ همگن نیست. دستگاه معادلات زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

این معادلات بیان کننده معادلات دو خط در صفحه هستند که در حالت کلی یا با هم موازی‌اند و یا یکدیگر را قطع می‌کنند. بر حسب آنکه خطوط فوق موازی یا متقاطع باشند دو حالت متمایز داریم.

حالت اول: وقتی که $ab' \neq ba'$ در این صورت دستگاه دو معادله دو مجهولی جوابی مانند (x_0, y_0) دارد که نقطه (x_0, y_0)نقطه تقاطع خطوط فوق می‌باشد. حال اگر تغییر متغیر $x = X + x_0$ و $y = Y + y_0$ را انتخاب کنیم معادله فوق به صورت زیر درمی‌آید.

$$[a(X + x_0) + b(Y + y_0) + c]dx + [a'(X + x_0) + b'(Y + y_0) + c']dy = 0$$

$$\Rightarrow (aX + bY + ax_0 + by_0 + c)dx + (a'X + b'Y + a'x_0 + b'y_0 + c')dy = 0$$

با توجه به اینکه (x_0, y_0) جواب دستگاه دو معادله دو مجهولی است. نتیجه معادله همگن زیر است.