به نام خدا

# مفاهیم بقا در درس ریاضی

مولف :

**مریم عسکوری نژاد**

انتشارات ارسطو

(سازمان چاپ و نشر ایران - ۱۴۰۳)

**نسخه الکترونیکی این اثر در سایت سازمان چاپ و نشر ایران و اپلیکیشن کتاب رسان موجود می باشد**

**chaponashr.ir**

سرشناسه : عسکوری نژاد، مریم، ۱۳۵۹-
عنوان و نام پدیدآور : مفاهیم بقا در درس ریاضی/ مولف مریم عسکوری نژاد.
مشخصات نشر : انتشارات ارسطو (سازمان چاپ و نشر ایران)، ۱۴۰۳.
مشخصات ظاهری : ۱۳۳ ص.
شابک : ۹-۲۹۶-۴۵۵-۶۲۲-۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی : فیپا
موضوع : ریاضیات - مفاهیم بقا
رده بندی کنگره : LB۱۰۲۷/۷
رده بندی دیویی : ۳۷۱/۴۴
شماره کتابشناسی ملی : ۹۹۲۰۷۸۲
اطلاعات رکورد کتابشناسی : فیپا

نام کتاب : مفاهیم بقا در درس ریاضی
مولف : مریم عسکوری نژاد
ناشر : انتشارات ارسطو (سازمان چاپ و نشر ایران)
صفحه آرایی، تنظیم و طرح جلد: پروانه مهاجر
تیراژ : ۱۰۰۰ جلد
نوبت چاپ : اول - ۱۴۰۳
چاپ : زبرجد
قیمت : ۱۳۳۰۰۰ تومان
فروش نسخه الکترونیکی - کتاب‌رسان :
https://chaponashr.ir/ketabresan
شابک : ۹-۲۹۶-۴۵۵-۶۲۲-۹۷۸
تلفن مرکز پخش : ۰۹۱۲۰۲۳۹۲۵۵
www. chaponashr. ir

انتشارات ارسطو
چاپ و نشر ایران
Chaponashr.ir

# فهرست

**فصل اول : تعاریف و مفاهیم اولیه ........................................................ ۷**

مقدمه ای در مفاهیم بقا........................................................ ۷

خلاصه ای از مقدمات........................................................ ۹

روش دلتا........................................................ ۱۰

نتایج مهم و مثالها........................................................ ۱۰

فرآیندهای وینر و گوسی مربوطه........................................................ ۱۵

اطلاعی از فرآیند وینر........................................................ ۱۵

تعریف و وجود فرآیند وینر........................................................ ۱۵

پل براونی........................................................ ۱۶

**فصل دوم: سانسور و برش ........................................................ ۱۹**

مقدمه........................................................ ۱۹

سانسور راست........................................................ ۲۰

سانسور نوع یک........................................................ ۲۰

سانسور پیشروی نوع یک........................................................ ۲۲

سانسور تعمیم یافته نوع یک........................................................ ۲۴

سانسور نوع دو........................................................ ۲۶

سانسور پیشروی نوع دو تعمیم........................................................ ۲۷

سانسور تصادفی........................................................ ۲۷

نکته‌های تئوری........................................................ ۲۸

سانسور چپ و فاصله‌ای........................................................ ۲۸

سانسور چپ........................................................ ۲۸

سانسور فاصله‌ای ........................................ ۳۰

برش........................................ ۳۰

برش راست........................................ ۳۱

ساختار درست نمایی برای داده‌های سانسور شده و داده‌های بریده شده........................................ ۳۱

نکات عملی........................................۳۶

نکات تئوری........................................۳۶

برآورد ناپارامتری کمیتهای اصلی برای داده‌های از راست سانسور و بریده شده از چپ...... ۳۸

برآوردگرهای توابع بقا و بخت تجمعی برای داده‌های از راست سانسور........................................ ۳۹

**فصل سوم :برآورد ناپارامتری از داده های بقای مقطعی ........................................۴۳**

مقدمه........................................ ۴۴

برآورد حد- حاصل ضربی در مقابل برآورد واردی........................................ ۵۰

یک حالت خاص........................................ ۵۱

حالت کلی........................................ ۵۳

برآورد ناپارامتری $G$ ........................................ ۵۷

خاصیت های مجانبی $\hat{G}(.;\hat{S})$........................................۶۲

کوواریانس های مجانبی توأم، برآورد ناپارامتری $\beta$ ........................................ ۸۵

برآورد ناپارامتری $H$........................................ ۸۹

NPMLEی $(S,G,Q)$........................................ ۹۱

اعتبار $\hat{Q}$ ........................................ ۹۲

بوت استرپ بدیهی تعمیم یافته........................................ ۹۳

**فصل چهارم: بررسی خواص مجانبی MLEی تابع بقا در نمونهگیری در طول- اُریب همراه با سانسور راست : رویکردی غیرشرطی ........................................۹۵**

مقدمه........................................ ۹۵

مدل های شرطی در مقایسه با مدلهای غیرشرطی ..... ۹۸
علامتگذاری و موارد مقدماتی ..... ۹۹
برآورد و مجانب ها ..... ۱۰۱
کاربرد برای بقای همراه با دمانس ..... ۱۲۳
تفسیرهای آخر ..... ۱۲۸

# فصل اول :

# تعاریف و مفاهیم اولیه

### مقدمه ای در مفاهیم بقا

در این بخش پارامترهای اصلی را که در مدل داده های بقا به کار می روند بررسی می کنیم.

فرض کنید $X$ زمانی تا بعضی پیشامدهای معین مانند مرگ، ظاهر شدن تومور، پیشرفت یک بیماری، برگشت بیماری، فرسودگی تجهیزات، توقف استعمال دخانیات، و غیره باشد.

با دقت بیشتری $X$ یک متغیر تصادفی نامنفی از یک جامعه همپراش[۱] است. توزیع $X$ را می توان توسط ۴ تابعی که در زیر معرفی می کنیم، مشخص کرد.

۱) تابع بقا[۲]، احتمال این است که فردی بعد از زمان $x$ زنده بماند.

۲) تابع نسبت بخت[۳]، شانس فردی در سن $x$ است که پیشامدی را در لحظه بعدی تجربه کند.

۳) تابع چگالی احتمال[۴](یا جرم احتمال)، احتمال غیرشرطی از رخ دادن پیشامدی در زمان $x$ است.

۴) میانگین طول عمر باقیمانده[۵]در زمان $x$، میانگین زمان تا پیشامد مطلوب است، به شرطی که پیشامد در $x$ رخ نداده باشد(که در اینجا مورد بحث قرار نمی گیرد).

اگر هر یک از این توابع مشخص باشند، سه تای دیگر به طور یکتا تعیین می شوند. در عمل این ۴ تابع، همراه تابع بخت تجمعی[۶]برای تشریح مفاهیم مختلف توزیع $X$ به کار می روند.

---

[۱] Homogeneous
[۲] Survival function
[۳] Hazard rate function
[۴] Probability density function
[۵] Mean residual life
[۶] Commulative hazard function

**تعریف ۱-۱-۱ (تابع بقا)** کمیت اصلی که برای توصیف پدیده های زمان تا پیشامد[1]بکار می رود تابع بقا است . احتمال این که فردی بعد زمان $x$ زنده بماند (تجربه پیشامد بعد زمان $x$) ، که به صورت زیر تعریف می شود

$$S(x)=\Pr(X>x)$$

توجه کنید که تابع بقا، تابعی غیر صعودی با مقدار یک در مبدأ و صفر در بینهایت است. اگر $X$ متغیر تصادفی پیوسته باشد، پس $S(x)$ تابعی پیوسته و اکیداً نزولی است.

وقتی $X$ متغیر تصادفی است، تابع بقا متمم تابع توزیع تجمعی است، یعنی $S(x)=1-F(x)$ که $F(x)=\Pr(X\le x)$. همچنین تابع بقا انتگرال تابع چگالی احتمال $f(x)$ است، یعنی

$$S(x)=\Pr(X>x)=\int_x^{\infty} f(t)dt$$

بنابراین

$$f(x)=-\frac{dS(x)}{dx}$$

وقتی $X$ متغیر تصادفی گسسته است به تکنیکهای مختلفی نیاز داریم. متغیرهای تصادفی گسسته در تحلیلهای بقا بواسطه گردکردن اندازه ها، طبقه بندی زمانهای شکست به فاصله ها و یا زمانی که طول عمرها به تعداد درستی از واحدها ارجاع شوند، بوجود می آیند. فرض کنید که $X$ مقادیر $x_j$ ، $j=1,2,\ldots$ را با تابع جرم احتمال $P(x_j)=P(X=x_j)$ بگیرد، که $x_1\langle x_2\langle\ldots$ ، تابع بقا برای متغیر تصادفی گسسته $X$ به صورت زیر داده می شود

$$S(x)=\Pr(X>x)=\sum_{x_j>x} p(x_j)$$

[1]Time to event data

**تعریف ۱-۱-۲ (تابع بخت)** نسبت بخت به صورت زیر تعریف می شود

$$h(x)=\lim_{\Delta x\to \cdot}\frac{P\left[x\le X<x+\Delta x \mid X\ge x\right]}{\Delta x}$$

اگر $X$ متغیر تصادفی پیوسته باشد، پس

$$h(x)=\frac{f(x)}{S(x)}=-dLn\left[S(x)\right]$$

یک کمیت نسبی، تابع بخت تجمعی، $H(x)$ است که به صورت زیر تعریف می شود

$$H(x)=\int_{\cdot}^{x}h(u)du=-Ln\left[S(x)\right]$$

بنابراین برای طول عمرهای پیوسته

$$S(x)=\exp\left[-H(x)\right]=\exp\left[-\int_{\cdot}^{x}h(u)du\right] \qquad (۱-۱-۱)$$

**خلاصه ای از مقدمات**

بعضی از تعاریف و لم هایی که در بخشهای بعد مورد استفاده قرار می گیرند در زیر بیان می داریم.

**تعریف ۱-۲-۱ (محکم بودن[۱])** خانواده $p.m.$ های $\{\mu_\alpha,\alpha\in A\}$ روی مجموعه اندیس $A$ ی مفروض محکم است اگر برای هر $\varepsilon>\cdot$، فاصله متناهی $I$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\inf_{\alpha\in A}\ \mu_\alpha(I)>۱-\varepsilon$$

**لم ۱-۲-۱ (لم اسلاتسکی)** اگر $X_n\to X$، $\alpha_n\to a$، $\beta_n\to b$ هر سه در توزیع، که $a$ و $b$ ثابت هستند.آنگاه $\alpha_n X_n+\beta_n\to aX+b$ در توزیع.

[۱] Tightness

**تعریف ۱-۲-۲ (تابع کدلاگ[2])** فرض کنید $D=D\left[0,1\right]$ فضای توابع حقیقی $x$ روی $\left[0,1\right]$ باشد که از راست پیوسته اند و حد چپ دارند یعنی

۱) برای $0\leq t < 1$ ، $x\left(t+\right)=\lim_{s\downarrow t} x\left(s\right)$ وجود داشته باشد و $x\left(t+\right)=x\left(t\right)$

۲) برای $0\leq t < 1$ ، $x\left(t-\right)=\lim_{s\uparrow t} x\left(s\right)$ وجود داشته باشد

توابعی که این خاصیت را دارند توابع کدلاگ نامیده می شوند. گوییم تابع $x$ در $t$ ناپیوستگی نوع اول دارد اگر $x\left(t+\right)$ و $x(t-)$ وجود داشته اما متفاوت باشند و $x(t)$ بین آنها قرار گیرد. نا پیوستگی های تابع کدلاگ از نوع اول می باشند.

**تعریف ۱-۲-۳ (عملگر خطی)** فرض کنید $X$ و $Y$ دو فضای خطی روی $\phi$ باشند. تابع $T:X\rightarrow Y$ را یک عملگر خطی[3] از $X$ به $Y$ گوئیم هرگاه به ازای هر $x,y\in\phi$ و هر $\alpha,\beta\in\phi$ داشته باشیم

$$T\left(\alpha X+\beta Y\right)=\alpha T\left(X\right)+\beta T\left(Y\right)$$

باید توجه داشت برای اینکه رابطه بالا معنی دار باشد، بایستی $X$ و $Y$ دارای یک میدان باشند یعنی میدان هر دوی آنها □ یا □ باشد.

**قضیه ۱-۲-۱ (قضیه نگاشت پیوستگی[4])** اگر دنباله $T_n$ در احتمال به $\theta$ همگرا باشد و $\phi$ تابعی پیوسته در $\theta$ باشد آنگاه $\phi\left(T_n\right)$ در احتمال به $\phi(\theta)$ همگراست.

### روش دلتا[5]

### نتایج مهم و مثالها

فرض کنید $T_n$ برآوردگری برای $\theta$ باشد که موجود است، اما کمیت مورد نظر $\phi(\theta)$ برای تابع معلوم $\phi$ است. یک برآوردگر طبیعی $\phi\left(T_n\right)$ است. حال خاصیتهای مجانبی $\phi\left(T_n\right)$ چگونه از خاصیتهای مجانبی $T_n$ پیروی می‌کنند؟ اولین نتیجه، نتیجه فوری از قضیه نگاشت

[1] Slutskey lemma
[2] Cadlog function
[3] Operator linear
[4] Continuous mapping theorem
[5] Delta method

پیوستگی است. اگر دنباله $T_n$ در احتمال به $\theta$ همگرا باشد و $\phi$ در $\theta$ پیوسته باشد، پس $\phi(T_n)$ در احتمال به $\phi(\theta)$ همگراست. اما علاقه اصلی ما، سوأل مشابهی در ارتباط با توزیع‌های حدی است. در حالت خاص، اگر $\sqrt{n}\,(T_n-\theta)$ همگرای ضعیف به یک توزیع حدی باشد، آیا این برای $\sqrt{n}\left(\phi(T_n)-\phi(\theta)\right)$ نیز درست است؟ اگر $\phi$ مشخص باشد، پس جواب مثبت است. به طور غیر معمول داریم

$$\sqrt{n}\left(\phi(T_n)-\phi(\theta)\right)\approx\phi'(\theta)\sqrt{n}\left(T_n-\theta\right)$$

که $\phi'(\theta)$ مشتق $\phi$ در $\theta$ است. اگر برای متغیر $T$، $\sqrt{n}\left(T_n-\theta\right)\to T$، پس انتظار داریم که

$$\sqrt{n}\left(\phi(T_n)-\phi(\theta)\right)\to\phi'(\theta)T$$

در حالت خاص اگر $\sqrt{n}\left(T_n-\theta\right)$ به طور مجانی $N\left(۰,\sigma^۲\right)$ باشد، پس انتظارداریم که $\sqrt{n}\left(\phi(T_n)-\phi(\theta)\right)$ به طور مجانبی $N\left(۰,\phi'(\theta)^۲\sigma^۲\right)$ باشد، این در اصول کلی‌ترین در قضیه زیر ثابت می‌شود.

در پاراگراف قبلی، $T_n$ حقیقی- مقدار است، اما بیشتر بررسی آماره $\phi(T_n)$ مورد نظر است که از چندین آماره اصلی ساخته شده است. بنابراین حالتی که $T_n=(T_{n,۱},\ldots,T_{n,k})$ برداری مقدار است را بررسی می‌کنیم که $\phi: IR^K\to IR^m$ تابع داده شده ای است که حداقل در همسایگی $\theta$ تعریف شده باشد. یادآوری می‌کنیم که $\phi$ در $\theta$ مشخص است اگر نگاشت خطی $\phi'_\theta: IR^k\to IR^m$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\phi(\theta+h)-\phi(\theta)=\phi'(h)+o\left(\|h\|\right)\qquad h\to ۰$$

همه عبارت‌ها در این معادله برداری‌هایی به طول $m$ هستند، و $\|h\|$ نرم اقلیدسی است. نگاشت خطی $h\to\phi'_\theta(h)$ بعضی اوقات "مشتق کلی" نامیده می‌شود، چون نقطه مقابل مشتقات جزئی. شرط کافی برای مشخص بودن $\phi$ این است که مشتقات جزئی $\partial\phi_j(x)/\partial x_i$ در همسایگی $\theta$ وجود داشته و در $\theta$ پیوسته باشند (فقط وجود مشتقات جزئی کافی نیست). در هر حالتی، مشتق کلی از مشتقات جزئی پیدا می‌شود .

اگر $\phi$ مشخص باشد، آن گاه به طور جزئی مشخص است، و نگاشت مشتق $h \to \phi'_\theta\ (h)$ ماتریس چندگانه‌ای به صورت زیر است

$$\phi'(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(\theta) & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_k}(\theta) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial x_1}(\theta) & \cdots & \frac{\partial \phi_m}{\partial x_k}(\theta) \end{pmatrix}$$

اگر وابستگی مشتق $\phi'_\theta$ روی $\theta$ پیوسته باشد. آنگاه $\phi$ مشخص پیوسته نامیده می‌شود.

بهتر است فکر کنیم مانند نزدیکی خطی $h \to \phi'_\theta\ (h)$ به تابع $h \to \phi(\theta + h) - \phi(\theta)$ است، نسبت به مجموعه از مشتقات جزئی. بنابراین مشتق در نقطه $\theta$، نگاشتی خطی است. اگر فضای برد $\phi$ خط حقیقی باشد. (که مشتق برداری افقی است)، پس مشتق، تا نژانت تابع نیز نامیده می‌شود.

توجه :

مشتق در یک نقطه معمولاً به صورت $\phi'(\theta)$ نوشته می‌شود که در این جا $\phi'_\theta$ است. درحالی که $\phi'(\theta)$ یک عدد است منظور دوم $\phi'(\theta)$ مشخص کردن نگاشتی است که به صورت $h \to \phi'_\theta(h) = \phi'(\theta)h$ تعریف می‌شود.

بنابراین در اصطلاحات حاضر، تابع مشتق معمول $\theta \to \phi'(\theta)$ نگاشتی است از IR به توی مجموعه نگاشتهای خطی از $IR \to IR$، نه نگاشتی از $IR \to IR$. به طور ترسیمی، تقریب خوب $h \to \phi(\theta) = \phi(\theta)h$، تا نژانت تابع $\phi$ در $\theta$ است.

اینجا روش دلتا در ابعاد بالاتری است.

**قضیه ۱-۳-۱** فرض کنید $\phi : IR^k \to IR^m$ نگاشتی اندازه پذیر تعریف شده روی زیر مجموعه‌ای از $IR^k$ باشد که در $\theta$ مشخص است. فرض کنید $T_n$ بردارهای تصادفی باشند و مقادیری که می‌گیرند در دامنه $\phi$ باشند.

اگر $r_n(T_n - \theta) \to T$ برای اعداد $r_n \to \infty$ پس $r_n(\phi(T_n) - \phi(\theta)) \to \phi'_\theta(T)$

به علاوه تفاوت بین $r_n(\phi(T_n)-\phi(\theta))$ و $\phi'_\theta(r_n(T_n-\theta))$ در احتمال به صفر همگراست.

**اثبات :** وقتی $r_n \to \infty$، بوسیله لم اسلاتسکی داریم

$$T_n-\theta=(۱/r_n)r_n(T_n-\theta)\to ۰T=۰$$

بنابراین $T_n-\theta$ در احتمال به صفر همگراست. تابع $g$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$g(h)=\begin{cases}\dfrac{\phi(\theta+h)-\phi(\theta)-\phi'_\theta(h)}{\|h\|} & h\neq ۰\\ ۰ & h=۰\end{cases}$$

با مشخص بودن $\phi$، $g$ در صفر پیوسته است. بنابراین به وسیله قضیه نگاشت پیوستگی

$$g(T_n-\theta)\xrightarrow{P}۰$$

از این رو باز بوسیله لم اسلاتسکی و قضیه نگاشت پیوستگی

$$r_n\|T_n-\theta\|g(T_n-\theta)\xrightarrow{P}\|T\|۰=۰$$

در نتیجه

$$r_n\left(\phi(T_n)-\phi(\theta)-\phi'_\theta(T_n-\theta)\right)=r_n\|T_n-\theta\|g(T_n-\theta)\xrightarrow{P}۰$$

چون ماتریس چند گانه پیوسته است، بوسیله قضیه نگاشت پیوستگی $\phi'_\theta(r_n(T_n-\theta))\to\phi'_\theta(T)$ بالاخره با به کار بردن لم اسلاتسکی، نتیجه می‌گیریم که دنباله $r_n(\phi(T_n)-\phi(\theta))$ حد ضعیف مشابهی دارد.

حالت معمول این است $\sqrt{n}(T_n-\theta)$ به یک توزیع نرمال چند متغیره $N_k(\mu,\Sigma)$ همگراست. پس نتیجه ای از قضیه این است که دنباله $\sqrt{n}(\phi(T_n)-\phi(\theta))$ در قانون به توزیع $N_m(\phi'_\theta\mu,\phi'_\theta\sum(\phi'_\theta)^T)$ همگراست.

**مثال ۱-۳-۱ (واریانس نمونه)** واریانس نمونه از $n$ مشاهده $x_1,\dots,x_n$ به صورت $s^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ تعریف می‌شود، و می‌تواند به صورت $\phi\left(\bar{X},\overline{X^2}\right)$ برای تابع $\phi(x,y)=y-x^2$ نوشته شود (برای سادگی نشان $n$ را به جای $n-1$ به کار می‌بریم) فرض کنید $s^2$ بر اساس نمونه‌ای از توزیعی است که گشتاوراول تا چهارم، $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$، متناهی هستند.

بوسیله قضیه حد مرکزی چند متغیره

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix}\bar{X}\\ \overline{X^2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\right) \rightarrow N_2\left(\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha_2-\alpha_1^2 & \alpha_3-\alpha_1\alpha_2\\ \alpha_3-\alpha_1\alpha_2 & \alpha_4-\alpha_2^2\end{pmatrix}\right)$$

نگاشت $\phi$ در نقطه $\theta=(\alpha_1,\alpha_2)^T$ مشخص است، با مشتق $\phi'_{(\alpha_1,\alpha_2)}=(-2\alpha_1,1)$ بنابراین اگر بردار $(T_1,T_2)'$ دارای توزیع نرمال در نمایش آخر باشند، آنگاه

$$\sqrt{n}\left(\phi\left(\bar{X},\overline{X^2}\right)-\phi\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\right) \rightarrow -2\alpha_1T_1+T_2$$

متغییر بعدی به صورت نرمال توزیع شده که میانگین صفر و واریانسی دارد که می‌تواند در $\alpha_1,\dots,\alpha_4$ بیان شود.

در حالتی که $\alpha_1=0$، واریانس $\alpha_4-\alpha_2^2$ است. حالت کلی می تواند به این حالت القا شود، زیرا $s^2$ تغییر نمی‌کند اگر مشاهدات $X_i$ با متغیرهای مرکزی $Y_i=X_i-\alpha_i$ جایگزین شوند. برای گشتاور مرکزی $X_i$ می‌نویسیم $\mu_k=EY_i^k$ توجه کنید که $S^2=\phi\left(\bar{Y},\overline{Y^2}\right)$ و $\phi(\mu_1,\mu_2)=\mu_2$ واریانس مشاهدات اصلی است، بدست می‌آوریم

$$\sqrt{n}\left(S^2-\mu_2\right)\rightarrow N\left(0,\mu_4-\mu_2^2\right)$$

در نظریه لم اسلاتسکی، نتایج یکسانی برای حالت ناریب $n/n-1S^2$ از واریانس نمونه برقرار است . برای اینکه $\sqrt{n}\left(n/n-1-1\right)\rightarrow 0$

## فرآیندهای وینر و گوسی مربوطه

### اطلاعی از فرآیند وینر

گیاه شناس انگلیسی براون[1]در ۱۸۲۶ مشاهده کرد که ذرات میکروسکوپی معلق در یک مایع تابع تماسهای مولکولی دائمی هستند و حرکات زیگراگی دارند (حرکت براونی)[2]. اینستین[3] (۱۹۰۵) کشف کرد که این حرکات می‌توانند بوسیلهٔ قوانین احتمال تحلیل شوند. یکی از ساده‌ترین مدلها برای حرکت براونی یک بعدی می‌تواند بر حسب پرتاب سکه یا مدل گام تصادفی داده شود. فرض کنید ذره‌ای روی خط حقیقی با شروع از مبدأ حرکت کند. در هر واحد زمانی این ذره می‌تواند با احتمال ۱/۲ یک گام به راست یا یک گام به چپ حرکت کند، فرض کنید ا ین گامها مستقل باشند، به $i$-اُمین گام ذره، $X_i$ می‌گوییم، پس $X_۱$ ، $X_۲$ ، ... متغیرهای تصادفی مستقل هستند با

$$p(X_۱ = +۱) = p(X_۱ = -۱) = ۱/۲$$

و بعد از $n$ گام ذره در $S_n = X_۱ + X_۲ + ..... + X_n$ قرار دارد. بنابراین مسیرهای بوجود آمدهٔ $S_۱$، $S_۲$،...وقتی واحد زمانی و گامها به اندازه کافی کوچک باشند کاملاً از حرکت براونی تبعیت می‌کنند.

در مدل واقعی حرکت بروانی، ذره گامهای آنی را به راست یا چپ طی می‌کند ، یعنی مقیاس زمانی پیوسته به جای گسسته به کار می‌رود، و طولهای $X_{i1}$، گامهایی هستند که به جای توزیع بالا به صورت نرمال توزیع شده‌اند.

### تعریف و وجود فرآیند وینر

فرآیند تصادفی $\{W(t;\omega) = W(t); ۰ \leq t < \infty\}$ که $W \in \Omega$، و $\{\Omega, \mathrm{A}, p\}$ یک فضای احتمال می باشد، فرآیند وینر[4]نامیده می‌شود اگر

أ. $W(t) - W(s) \in N(۰, t-s)$ برای همهٔ $۰ \leq s < t < \infty$ و $W(۰) = ۰$

[1] Brown
[2] Brownian motion
[3] Einstein
[4] Winer process