به نام خدا

مروری بر خواص برخی از فضاهای باناخ

مولف :

رقیه رضایی

انتشارات ارسطو

(سازمان چاپ و نشر ایران - ۱۴۰۴)

سرشناسه : رضایی ، رقیه ، ۱۳۶۲
عنوان و نام پدیدآور : مروری بر خواص برخی از فضاهای باناخ / مولف رقیه رضایی
مشخصات نشر : انتشارات ارسطو (سازمان چاپ و نشر ایران)، ۱۴۰۴.
مشخصات ظاهری : ۱۱۰ص.
شابک : ۳-۳۸۴-۴۵۵-۶۲۲-۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی : فیپا
یادداشت : کتابنامه.
موضوع : مرور ــ خواص ــ فضاهای باناخ
رده بندی کنگره : TP ۹۸۳
رده بندی دیویی : ۵۵/۶۶۸
شماره کتابشناسی ملی : ۹۹۷۶۵۸۸
اطلاعات رکورد کتابشناسی : فیپا

نام کتاب : مروری بر خواص برخی از فضاهای باناخ
مولف : رقیه رضایی
ناشر : انتشارات ارسطو (سازمان چاپ و نشر ایران)
صفحه آرایی، تنظیم و طرح جلد: پروانه مهاجر
تیراژ : ۱۰۰۰ جلد
نوبت چاپ : اول ــ ۱۴۰۴
چاپ : زبرجد
قیمت : ۱۱۰۰۰۰ تومان
فروش نسخه الکترونیکی - کتاب رسان :
https//:chaponashr.ir/ketabresan
شابک : ۳-۳۸۴-۴۵۵-۶۲۲-۹۷۸
تلفن مرکز پخش : ۰۹۱۲۰۲۳۹۲۵۵
www .chaponashr .Ir

انتشارات ارسطو
چاپ و نشر ایران
Chaponashr.ir

تقدیم به آنان که تفکر کردن را به ما آموختند

و آن‌گاه که افتادیم،

انگیزه‌ی دوباره زندگی کردن را به ما آموختند.

فهرست

چکیده:

دانشجویان کارشناسی ارشد ریاضی محض- آنالیز در دروس خود با فضاهای باناخ وهیلبرت آشنایی بیشتری پیدا می‌کنند. برای درک بهتر قضایا و مطالب مربوط به این فضاها، ارائه هر چه بیشتر مثال‌ها، کمک بیشتری در زمینه این شناخت، مهیا می‌کند. این پایان‌نامه شامل سه فصل است که در فصل اول تعاریف مقدماتی و مطالبی در خصوص فضای باناخ ارائه می شود، در فصل دوم نیز به معرفی فضای هیلبرت می‌پردازیم، و در فصل سوم مطالبی در مورد جبرهای باناخ ارائه می‌شود. در هر سه فصل قضیه‌ها یا نکته‌هایی گفته شده و سعی شده است که گاه با حذف بعضی از شرایط از قضایا، مثال‌هایی آورده شود که به فهم بیشتر مطالب کمک کند.

کلمات کلیدی: فضای باناخ، فضای هیلبرت، جبرباناخ، طیف

فصل اول:

فضای باناخ

دراین فصل پس از ارائه چند تعریف مقدماتی، فضای باناخ را تعریف کرده و سپس به بیان مطالبی در مورد این دسته از فضاها می‌پردازیم. فرض می‌کنیم خواننده با فضاهای توپولوژیک و تعاریف مربوط به نظریه اندازه آشنا باشد.

۱. ۱. تعریف:

یک فضای متریک مجموعه‌ای است مانند X با تابعی چون $d: X \times X \to \mathbb{R}$ (تابع d رامتر می‌نامیم) که دارای خواص زیر می‌باشد.

الف) به‌ازای‌هر x و y در X، $۰ \leq d(x,y) < \infty$.

ب) $d(x,y) = ۰$ اگروفقطاگر $x = y$.

پ) به ازای هر x و y در X، $d(x,y) = d(y,x)$.

ت) به ازای هر z,y,x در X ، $\mathrm{d}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \leq \mathrm{d}(\mathrm{x},z) + \mathrm{d}(\mathrm{z},\mathrm{y})$. این خاصیت نامساوی مثلثی نامیده می‌شود.

۱. ۲. تعریف:

دنباله‌ی $\{x_n\}$ در فضای متریک X را یک دنباله‌ی کوشی می‌نامند، هرگاه به‌ازای‌هر $\varepsilon > 0$ عددی طبیعی مانند N باشد، به‌طوری‌که اگر $m \geq N$ ، $n \geq N$، آن‌گاه

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

۱. ۳. تعریف:

دنباله‌ی $\{x_n\}$ در فضای متریک X را همگرا نامند، هرگاه نقطه‌ای مانند $x \in X$ با خاصیت زیر وجود داشته باشد.

به‌ازای‌هر $\varepsilon > 0$ عدد طبیعی چون N باشد، به‌طوری‌که $n \geq N$ نامساوی $d(x_n, x) < \varepsilon$ را ایجاب کند. در این صورت دنباله‌ی $\{x_n\}$ را همگرا به x می‌نامیم و می‌نویسیم

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \ .$$

۱. ۴. تعریف:

فضای متری که در آن هر دنباله‌ی کوشی همگرا باشد را کامل[۱](تام) گویند.

---

[۱].Complete

تمام فضاهای متری فشرده و کلیه‌ی فضای‌های اقلیدسی تام اند.

فضای اعداد گویا با متر $d(x,y)=|x-y|$ یک فضای غیرتام است.

۱. ۵. تعریف:

اگر X یک فضای برداری روی میدان F، $\left(\mathbb{C} \text{ یا } R\right)$ باشد، یک شبه‌نرم[۱]

تابعی مثل $P: X \to [\cdot,\infty[$ است که دارای ویژگی‌های زیر باشد:

الف)برای‌هر $x,y \in X$ نامساوی مثلثی $P(x+y) \le P(x)+P(y)$

برقرار باشد.

ب) برای هر $x \in X$ و هر $\epsilon \alpha \mathrm{F}$، $P(\alpha x)=|\alpha|P(x)$.

شبه‌نرم P را یک نرم می‌نامند، هرگاه $P(x)=\cdot$ ایجاب کند $x=\cdot$.

معمولاً نرم را به‌وسیله $\|.\|$ نمایش می‌دهند. اگر X دارای یک نرم باشد، آن‌گاه

$d(x,y)=\|x\|\|y\|$ یک متر را روی X تعریف می‌کند.

از این به بعد منظور از F میدان اعداد حقیقی یا مختلط است.

حال به بیان چند مثال در مورد فضاهای نرم‌دار می‌پردازیم.

---

[۱].Seminorm

الف) اعداد مختلط با $\|x\| = |x|$ یک فضای نرم‌دار است.

ب) $L^{\mathrm{p}}(\mu)$ برای $P > ۱$ با نرم $\left(\int |f|^{p}\, d\mu\right)^{\frac{۱}{p}} < \infty$ یک فضای نرم‌دار است (تعریف این فضا را در ۱. ۹ خواهید دید).

ج) فرض‌کنید X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. فضای $X \oplus_{۱} Y = \{(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}$ با جمع و ضرب اسکالر زیر یک فضای برداری است.

$$(x_{۱}, y_{۱}) + (x_{۲}, y_{۲}) = (x_{۱} + x_{۲}, y_{۱} + y_{۲});\ x_{۱}, x_{۲} \in X, y_{۱}, y_{۲} \in Y.$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y);\ \ \alpha \epsilon F, x \epsilon X, y \epsilon Y.$$

اگر برای هر $(x, y) \in X \oplus_{۱} Y$ قرار دهیم $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$، آن‌گاه یک نرم بر $X \oplus_{۱} Y$ خواهیم داشت.

قضیه زیر، قضیه بسیار شناخته شده‌ای در آنالیز تابعی است.

۱. ۶. قضیه:

هر فضای برداری نرم دار که شامل یک گوی فشرده باشد، متناهی‌البعد است ([۳]).در مثال زیر از این قضیه استفاده شده است.

۱. ۷. مثال:

فضای $C([۰,۱])$ را با سوپریمم نرم در نظر بگیرید. در این صورت

$\{f \in C([۰,۱]): \|f\| \leq ۱\}$ فشرده نیست. زیرا $\{ ۱, x, x^۲, \ldots \}$ یک پایه برای $C([۰,۱])$ است. پس $C([۰,۱])$ متناهی البعد نیست و بنابراین با توجه به قضیه (۱. ۶)

$\{f \in C([۰,۱]): \|f\| \leq ۱\}$، فشرده نیست.

۱. ۸. تعریف:

یک فضای خطی نرم‌دار که با متر تعریف شده به‌وسیله‌ی نرمش، کامل باشد را یک فضای باناخ[۱]می‌نامند.

[۱]. Banach Space

۱. ۹. مثال:

فرض‌کنید (X, m, μ)یک فضای اندازه باشد و

$$L^{\mathrm{p}}(\mu) = \left\{ f: X \xrightarrow{\text{اندازه پذیر}} \mathbb{C} : \int |f|^p \, d\mu < \infty \right\}.$$

اگر برای هر$L^p(\mu)$ $f \in$ ، قرار دهیم $\|f\| = (\int |f|^p \, d\mu)^{\frac{۱}{p}} < \infty$ ،

آن‌گاه برای $P > ۱$، $L^p(\mu)$ یک فضای باناخ است. ([۶]). هرگاه $X = \mathbb{N}$ و

μ اندازه شمارشی باشد، آن‌گاه $L^{\mathrm{p}}(\mu)$ را با l^p نمایش می‌دهیم. در حقیقت

$$l^p = \left\{ \{x_n\} : \sum_{n=۱}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

۱. ۱۰. مثال:

اعداد مختلط با $\|x\| = |x|$ یک فضای باناخ می باشد.

۱. ۱۱. تعریف:

فرض‌کنید Y یک زیرفضای بسته از فضای نرم‌دار X باشد. Y را یک زیرفضای متمم X[۱] می‌نامیم، هرگاه زیرفضای بسته‌ای چون Z از X وجود داشته باشد که $X = Y \oplus_{۱} Z$.

۱. ۱۲. قضیه:

در یک فضای هیلبرت هر زیرفضای بسته یک زیرفضای متمم است. ([۶])، (تعریف فضای هیلبرت را در فصل دوم خواهید دید.)

حال مثالی از یک فضای باناخ را ارائه می‌دهیم که یک زیرفضای بسته دارد که زیرفضای متمم نیست.

۱. ۱۳. مثال:

فرض کنید $l^{\infty} = \left\{ \{x_n\} :\ x_n \in \mathbb{C}\,,\ \text{کراندار}\ \{x_n\} \right\}$ و $c_{.} = \left\{ \{x_n\} \in l^{\infty}\ |\ \ x_n \to {.} \right\}$ در این صورت $c_{.}$ یک زیرفضای بسته از l^{∞} است، اما زیرفضای متمم آن نیست ([۷]).

[۱]. Complement Subspace